الرامي في الرياضيات

تأسيس الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

جيل 2007

الأستاذ رامي البيجاوي

0788565614

تابعوا شرح مادة الرياضيات العلمي على موقع الرامي في الرياضيات

الموضوع	المواضيع الفرعية
١ – الأعداد الحقيقية	١ – أنواع الأعداد الحقيقية ٢ – الأعداد الصحيحة والعمليات عليها ٣ – الكسور والعمليات عليها
٢ – الأسس	١ – الأس الصحيح الموجب والسالب ٢ – الأس الكسري الموجب والسالب ٣ – قوانين الأسس
٣ – الجذور	١ – الجذور الزوجية ٢ – الجذور الفردية
٤ – الحدود والمقادير الجبرية	١– تعريفات عامة ٢ – العمليات الحسابية ٣ – إيجاد القيم العددية ٤ – عمليات التجميع والتبسيط
٥ – طرق التحليل	١ – العامل المشترك ٢ – الفرق بين مربعين ٣ – تحليل العبارة التربيعية ٤ – مجموع وفرق مكعبين ٥ – الأصفار النسبية والقسمة الطويلة والتركيبية
٦ – كثيرات الحدود وخصائصها	١ – الاقتران الثابت ٢ – الاقتران الخطي ٣ – الاقتران التربيعي ٤ – الاقتران التكعيبي

٧ – اقتران القيمة المطلقة	١ – تعريف الاقتران ٢ – إعادة تعريف المطلق ٣ – تمثيل الاقتران ٤ – حل معادلة المطلق ٥ – حل متباينة المطلق
٨ – الاقتران الأسي الطبيعي	١ – مفهوم الاقتران ٢ – خصائص الاقتران ٣ – تمثيل الاقتران بيانيا
٩ – الاقتران اللوغاريتمي	١ – مفهوم الاقتران ٢ – خصائص الاقتران ٣ – تمثيل الاقتران بيانيا
١٠ – الاقترانات المثلثية (الدائري)	١ – جميع مادة المثلثي كاملة شرح بالتفصيل ٢ – حل المعادلات المثلثية ٣ – المتطابقات
١١ – ميل الخط المستقيم	١ – معادلة الخط المستقيم ٢ – خصائص الخط المستقيم ٣ – طرق إيجاد ميل الخط المستقيم
١٢ – النهايات والاتصال	شرح مفصل للنهايات والاتصال
١٣ – الاشتقاق	شرح كامل موضوع التفاضل وقواعد الاشتقاق

مجموعات الأعداد

١) الأعداد الطبيعيّة الصحيحة

❖ **Natural Numbers (N^*) :**

$$N^* = \{ 1 , 2 , 3 , \dots \}$$

---

٢) الأعداد الكليّة = الطبيعيّة + ZERO (N)

❖ **Whole Numbers (N) :**

$$N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \dots \}$$

---

٣) الأعداد الصحيحة

❖ **Integer Numbers (Z) :**

$$Z = \{ \dots , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , \dots \}$$

❖ **وتقسم الأعداد الصحيحة إلى :**

$$Z^+ \quad \{ 1 , 2 , 3 , \dots \}$$

$$Z^- \quad \{ -1 , -2 , -3 , \dots \}$$

$$Z^* \quad \{ \dots , -2 , -1 , 1 , 2 , \dots \}$$

٤) الأعداد النسبية

❖ Rational Numbers (Q) :

$$Q = \frac{a}{b} \quad \begin{matrix} a \in Z \\ b \in Z^* \end{matrix}$$

$\frac{a}{b}$ (undefined)
If $b = 0$

الأعداد النسبية العشرية (Q)

الأعداد العشرية المنتهية
2,3
5,9

الأعداد الدورية
2,333...
5,444...

" الأعداد غير النسبيّة "

أعداد عشرية غير منتهيّة

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, e
2) $\pi = 3.141592653...$

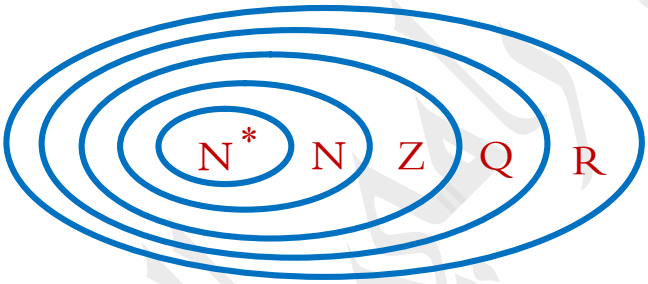
ملاحظة

$$\pi \neq \frac{22}{7}$$
$$\pi \approx \frac{22}{7}$$

$$\frac{22}{7} = 3 . \overline{142857}$$

ملاحظة

$$N^* \subset N \subset Z \subset Q \subset R$$



العمليات الحسابيّة على الأعداد الحقيقية

١) الجمع والطرح للأعداد المتشابهة في الإشارة

قاعدة

نجمع دائماً ونضع إشارة السؤال

Ex:

1) $2+8=$

2) $-3+-4=$

3) $-6-2=$

---

٢) الجمع والطرح للأعداد المختلفة في الإشارة

قاعدة

نطرح دائماً ونضع إشارة العدد الأكبر

Ex:

1) $8+-2=$

2) $7-10=$

3) $-3+6=$

٣) الضرب والقسمة

متشابهة دائماً
موجب

مختلف دائماً
سالب

Ex:

1) $-2\times 7=$

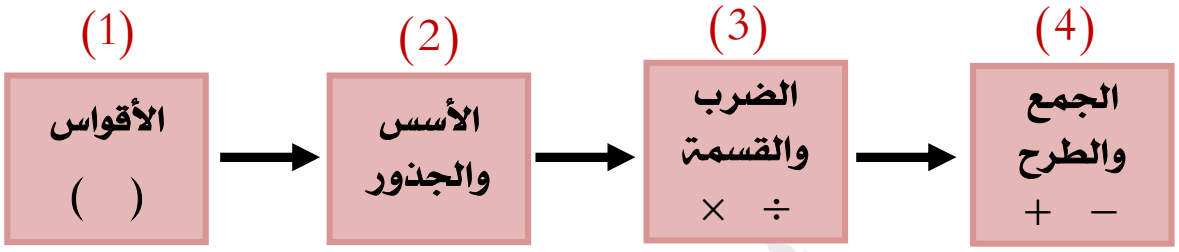
2) $-8\times -3=$

3) $6\times -4=$

4) $5\times 3=$

أ. رامي البيجاوي

أولويات العمليات الحسابيّة



Ex:

1) $2-4\times 6=$

2) $5-(6\times 2)+(3)^2=$

3) $\sqrt{9}-4+(5)^2-1=$

4) $2\times -3+\frac{6}{2}-(4\times -1)+(3)^2=$

5) $\frac{10}{5}-4+\sqrt{16}-(4)^2+7-(5\times 1)=$

6) $\frac{\sqrt{4}}{2}-7+(3\times 1)^2-\sqrt[3]{8}-20=$

العمليات الحسابيّة على الكسور

١) الجمع والطرح

قاعدة

عند الجمع والطرح للكسور ابدأ أولاً بتوحيد المقام

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{(C\times B)\mp(A\times D)}{(B\times D)}$$

Ex:

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$

2) $\frac{4}{3}-\frac{5}{2}=$

3) $\frac{-2}{4}-\frac{5}{10}=$

4) $6+\frac{-3}{5}=$

٢) الضرب

قاعدة

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$$

Ex:

1) $\frac{2}{3}+\frac{6}{4}=$

2) $\frac{-5}{8}\times 3=$

3) $\frac{-2}{4}\times\frac{-7}{5}=$

4) $\frac{7}{4}\times\frac{3}{9}=$

أ. رامي البيجاوي

٣) القسمة

قاعدة

البسط × مقلوب المقام

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$$

Ex:

1) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{-3}{9}} =$

2) $\frac{4}{\frac{6}{4}} =$

3) $\frac{\frac{-9}{2}}{5} =$

تمرينات

أجد قيمة كل مما يلي:-

1) $\frac{-4}{3}+\frac{7}{2}=$

2) $\frac{3}{5}-4+5\times 4-(3)^2=$

3) $\frac{6}{4}\times -3+\frac{1}{2}=$

4) $\frac{\frac{7}{4}}{3}=$

أ. رامي البيجاوي

الأسس

❖ الصيغة العامة :

$(X)^{a}$ ← الأس

الأساس ↙

حالات الأسس

(١) $(\mp X)^{+a}$

(٢) $(\mp X)^{-a}$

(٣) $(\mp X)^{\frac{a}{b}}$

(٤) $(\mp X)^{\frac{-a}{b}}$

١) الأس عدد صحيح موجب $(\mp X)^{+a}$

قاعدة

١) $(-2)^{4}=16 \Leftarrow (+X)=(-X)^{a}$

If a : عدد زوجي

٢) $(-2)^{3}=-8 \Leftarrow (-X)=(-X)^{a}$

If a : عدد فردي

٣) $1=(a)^{zero}$

فكّر لماذا

جدول الأسس

$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$(6)^2=36$
$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$	$5^3=125$	$(7)^2=49$
$2^4=16$	$3^4=81$			$(8)^2=64$
$2^5=32$				$(9)^2=81$
$2^6=64$				$(10)^2=100$
$2^7=128$				$(11)^2=121$
				$(12)^2=144$
				$(13)^2=169$

٢) الأس عدد صحيح سالب $(\mp X)^{-a}$

قاعدة

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-a}=\left(\frac{y}{x}\right)^{+a}$$

انتبه

$$* \frac{(x)^{-a}}{y} \neq \frac{y}{(x)^{a}} \quad \text{(خطأ)}$$

$$* \frac{(x)^{-a}}{y} = \frac{1}{(x)^{a}(y)} \quad \text{(صح)}$$

Ex:

1) $(2)^{-3} = \frac{1}{(2)^3} = \frac{1}{8}$

2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2} = \frac{25}{16}$

3) $\frac{1}{(4)^{-3}} = (4)^3 = 64$

4) $\frac{(-5)^{-2}}{4} = \frac{1}{4\times(-5)^2} = \frac{1}{4\times 25} = \frac{1}{100}$

---

٣) الأس كسر

قاعدة

$$(a)^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{(a)^b}$$

(b داخل ← ، c خارج ↖)

Ex:

1) $(4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{(4)^1} = 2$

ملاحظة

الجذور الزوجيّة دائماً الناتج عدد موجب

$$\sqrt[2]{16} = \sqrt[2]{(4)^2} = 4$$

2) $(8)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{(8)^4} = (2)^4 = 16$

3) $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^1} = -3$

ملاحظة

ما بداخل الجذر الفردي يجوز أن يكون سالب .

4) $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{25}{9}\right)^3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$

5) $\left(\frac{-125}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-5}{4}$

---

٤) الأس كسر سالب

قاعدة

$$(a)^{\frac{-b}{c}} = \frac{1}{(a)^{\frac{b}{c}}} = \frac{1}{\sqrt[c]{(a)^b}}$$

Ex:

1) $(36)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{(36)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(6)^2}} = \frac{1}{6}$

2) $(-8)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{(-8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$

3) $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{(3)^2}{(5)^2}} = \frac{3}{5}$

4) $\left(\frac{-8}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} =$

5) $\left(\frac{100}{16}\right)^{\frac{-1}{2}} =$

6) $\left(\frac{-1}{32}\right)^{\frac{-2}{5}} =$

7) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{-2}{4}} =$

قوانين الأسس

1) $(a)^{0}=1$

2) $(a)^{-b}=\left(\frac{a}{1}\right)^{-b}=\left(\frac{1}{a}\right)^{b}$ ، $\left(\frac{a}{b}\right)^{c}=\left(\frac{b}{a}\right)^{-c}$

3) $\left((a)^{b}\right)^{c}=(a)^{b\times c}$ بشرط ؟؟؟؟

انتبه

4) $\left((a)^{b}\right)^{c}=\left((a)^{c}\right)^{b}$ بشرط ؟؟؟؟

انتبه

5) $(a)^{\frac{b}{c}}=\sqrt[c]{(a)^{b}}$

6) $(a\times b)^{c}=(a)^{c}\times(b)^{c}$

$(a\mp b)^{c}\neq(a)^{c}\mp(b)^{c}$

انتبه

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^{c}=\frac{(a)^{c}}{(b)^{c}}$ ، $b\neq 0$

8) $(a)^b \times (a)^c \Leftrightarrow (a)^{b+c}$

9) $\dfrac{(a)^b}{(a)^c} \Leftrightarrow (a)^{b-c} \quad , \quad a \neq 0$

10) $(a)^b = (a)^c \Rightarrow b = c$

أنواع الجذور

- ١) الجذور الفردية
- ٢) الجذور الزوجية

١) الجذور الفردية

$\sqrt[7]{\ }$ ، $\sqrt[5]{\ }$ ، $\sqrt[3]{\ }$

قاعدة

$\sqrt[N]{\text{موجب}} = \oplus$ ، $\sqrt[N]{\text{سالب}} = \ominus$

N : عدد فردي

Ex:

1) $\sqrt[3]{8} =$

2) $\sqrt[3]{27} =$

3) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} =$

4) $\sqrt[3]{-1} =$

5) $\sqrt[3]{125} =$

6) $\sqrt[3]{x^3} =$

7) $\sqrt[3]{\frac{-8}{y^3}} =$

8) $\sqrt[3]{\frac{1000}{x^3 y^3}} =$

9) $\sqrt[3]{(-3)^3} =$

10) $\sqrt[5]{-32} =$

تمرينات

أوجد قيمة كل مما يلي:-

1) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{27} =$

2) $\sqrt[3]{\frac{-1}{8}} \times \frac{3}{\sqrt[3]{-27}} =$

٢) الجذور الزوجية

$\sqrt[2]{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$, $\sqrt[6]{\quad}$

قاعدة

ناتج الجذور الزوجية دائماً موجبة $\sqrt[2]{a} \geq 0$

$$\sqrt[2]{(a)^2} = |a|$$

Ex:

1) $\sqrt[2]{(5)^2} = |5| = 5$

2) $\sqrt[4]{(16)^4} = |16| = 16$

3) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

4) $\sqrt[2]{X^2} = |X|$

5) $\sqrt{100} = |10| = 10$

6) $\sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \left|\frac{x}{y}\right|$

7) $\sqrt{-36} =$ قيمة غير حقيقية (غير معرّفة)

ملاحظة

1) $\sqrt[2]{X^2} \neq \left(\sqrt{X}\right)^2$

2) $\sqrt[2]{X^2} = \left(\sqrt{X}\right)^2 = X$ ، $X \geq 0$ بشرط

Ex: 1) $\sqrt[2]{(5)^2} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

2) $\sqrt[2]{(-4)^2} = \left(\sqrt[2]{-4}\right)^2 = -4$, $\sqrt{a} \geq 0$

الحدود الجبريّة والمقادير الجبريّة

❖ تعريفات عامة :

١) الحد الجبري: حاصل ضرب عدد حقيقي بمتغيّر.

$(a\,X)$ — a: عدد حقيقي، X: متغيّر

Ex:

1) $3X$
2) $-7X^3$
3) $\frac{xy}{4}$
4) $\sqrt{3}\,yx^2$
5) $\pi\,x^2$
6) $-yx$
7) $6\sqrt{X}$
8) $\frac{8}{\sqrt{y}}$
9) $10X^{-3}$

---

٢) المقدار الجبري: حاصل جمع وطرح حدود جبريّة.

Ex:

1) $3x^2-8y+\frac{6}{x}-3xy$
2) $\sqrt[3]{x}-\pi x^2-3y^{-4}+xy$
3) $(x)^{\frac{-3}{2}}-(6x)^2-\frac{8}{4x}$

ملاحظة

ax — a: ثابت (معامل x)، x: متغيّر

❖ حالة خاصة : العدد الحقيقي الثابت يمكن أن يكتب على صورة حدّ جبري.

فكرّ لماذا

العمليات الحسابية على الحدود الجبرية
$(+ , - , * , \div)$

١) الجمع والطرح $(+ , -)$:

قاعدة

نجمع ونطرح الحدود المتشابهة ولها نفس القوة:

$$ax \mp bx = (a \mp b)x$$

Ex:

1) $2x-3y+8x-4=$

2) $7x^2-4yx+9x^2=$

3) $2\pi x^3-8\pi x^3=$

4) $6xy-12yx=$

5) $\sqrt{x}-9\sqrt{x}=$

6) $x^2-4xy+7x^2-3=$

7) $\frac{x^3}{2}-\frac{4x^2}{6}+\frac{5x^2}{4}=$

8) $(X)^{-3}+6(X)^{-3}-\frac{1}{4}=$

9) $\frac{4}{x^2}-6x^{-2}=$

10) $x^3-7x+y-4=$

ملاحظة

قبل إجراء عملية الجمع والطرح يجب أن نحول إلى صورة أسس، وأن يكون المتغيّر في البسط دائماً.

٢) الضرب

1 قاعدة

$$a(x)^m * b(x)^n = (a*b)(x)^{m+n}$$

Ex:

1) $-3X^2 * 6X =$

2) $X^{-4} * \frac{3}{2} X^5 =$

3) $\frac{-X^2}{3} * 2X^4 =$

4) $\sqrt[3]{X} * X^3 =$

5) $\frac{-3}{X^{-4}} * -6X^{-7} =$

6) $\pi X^3 * -3X^4 =$

---

2 قاعدة

$$a(x)^m * b(y)^n = (a*b)(x^m * y^n)$$

Ex:

1) $3x^2 * 6y =$

2) $\frac{x}{4} * 8y^2 =$

3) $-4xy * 8x^3 =$

4) $\pi yx * 3 =$

5) $y^{-3} * 3x^{-2} =$

6) $-7xy * y^{-1} =$

---

3 قاعدة

$$(x) * (x)^{-1} = 1$$

فكّر لماذا

٣) القسمة

$$\frac{(a)^b}{(a)^c} \Leftrightarrow (a)^{b-c} \quad , \quad \boxed{a \neq 0}$$

Ex:

1) $\frac{X^3}{X} =$

2) $\frac{5X^4}{X^3} =$

3) $\frac{X^3}{7X^5} =$

4) $\frac{6X}{12X^6} =$

5) $\frac{-3X}{X^5} =$

6) $\frac{\sqrt[3]{X}}{\sqrt[2]{X}} =$

❖ إيجاد القيم العدديّة للمقادير الجبرية:-

قاعدة

$$(-X)^2 \neq -(X)^2$$

Ex: إذا كان $x=-2$ ، $y=3$ ، جد قيمة ما يلي

1) $\frac{1}{2}x^2 - y + 6 =$

2) $-(y^2) + (-x)^2 - \frac{3}{-y} =$

3) $\sqrt{(-x)^2} + (xy) - 6 =$

4) $\frac{y}{x^2} + \frac{(x)^4}{8} - \frac{1}{y} =$

❖ فك الأقواس:-

قاعدة 1

$$(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$$

دائما موجبة

Ex: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

قاعدة 2

$$(a \mp b)^3 = a^3 \mp (3 * a * b^2) \mp (3 * a^2 * b) \mp b^3$$

$(a+b)^2 =$ $+$ $+$ $+$

$(a-b)^2 =$ $-$ $+$ $-$

❖ إنطاق المقام:-

التخلص من الجذر الموجود في المقام.

Ex: 1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

* $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = |a| = a$

2) $\dfrac{-3}{\sqrt{7}} \rightarrow \dfrac{-3\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \dfrac{-3\sqrt{7}}{7}$

❖ تبسيط الجذور:-

Ex: 1) $\sqrt{18} = \sqrt{9\times2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2) $\sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

3) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\times2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

4) $\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{-27\times2} = \sqrt[3]{-27} \times \sqrt[3]{2} = -3\sqrt[3]{2}$

5) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

قاعدة

إذا كان $(a\ ,\ b)$ أعداد حقيقيّة موجبة فإن كل مما يلي صحيح

Ex:

1) $\sqrt[h]{a*b} \Leftrightarrow \sqrt[h]{a} * \sqrt[h]{b}$

2) $\sqrt[h]{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[h]{a}}{\sqrt[h]{b}}$, $b \neq 0$, $a \neq 0$

قاعدة

$\frac{a}{b}$ = قيمة غير معرّفة $b=0$, $a=0$

Ex:

1) $\frac{5}{0} =$

2) $\frac{-2}{0} =$

3) $\frac{0}{0} =$

$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ *

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ *

طرق التحليل والمقادير الجبريّة

ملاحظة

مقدار جبري = صفر ← معادلة

١) طريقة إخراج عامل مشترك (عدد ثابت أو متغيّر)

ابحث عن العدد الأصغر والمتغيّر الذي يحتوي على القوة الأصغر:

Ex:

1) $4X^2 - 16 = 0$

2) $-3X^3 - 9X = 0$

3) $\frac{X^2}{8} - 24X = 0$

4) $X - X^2 = 0$

5) $5X - 7X^4 = 0$

6) $6X - 2X^3 = 0$

7) $X^4 - \sqrt{X} = 0$

8) $Xy^2 - 6X^2y = 0$

9) $\frac{X^2}{7} + \frac{3X}{14} = 0$

10) $\sqrt{3}\,X^2 - 3 = 0$

11) $X^2 - 6 = 0$

12) $X^4 + 3X^{-3} = 0$

---

٢) الفرق بين مربعين:-

$$X^2 - y^2 = (X + y)(X - y)$$

$X \quad X \quad y \quad y$

ملاحظة

$X^2 + y^2$ ← **مجموع مربعين لا تحلل**

قاعدة

1) $X^2 \begin{cases} X \\ X \end{cases}$ 2) $9 \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases}$

3) $X \begin{cases} \sqrt{x} \\ \sqrt{x} \end{cases}$ 4) $7 \begin{cases} \sqrt{7} \\ \sqrt{7} \end{cases}$

Ex:

1) $4X^2 - 9 = 0$

2) $36 - X^2 = 0$

3) $X^2 - 5 = 0$

4) $X - 7 = 0$

5) $\frac{X^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$

6) $\frac{X}{4} - 6y^2 = 0$

7) $(X-1)^2 - y^2 = 0$

8) $(X+2)^2 - (X+1)^2 = 0$

٣) مجموع وفرق بين مكعبين:-

$$X^3 + y^3 = (X \mp y)(X^2 \pm Xy \oplus y^2)$$

نفس — عكس — دائما موجب

قاعدة

$$\sqrt[3]{X^3} = X$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$6 = \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6}$$

$$y = \sqrt[3]{y} \times \sqrt[3]{y} \times \sqrt[3]{y}$$

Ex:

1) $X^3 + 125 = 0$

2) $8X^3 - 27 = 0$

3) $\frac{X^3}{8} + \frac{1}{y^3} = 0$

4) $X^3 - 5 = 0$

5) $X + y = 0$

6) $X - 3 = 0$

7) $(X-1)^3-8=0$

8) $(X+1)^3+(X-2)^3=0$

9) $yX^3+1=0$

10) $(xy)^3-8=0$

---

٤) العبارة التربيعية:-

وتقسم إلى نوعين:-

1) $AX^2 \mp BX \mp C$

$A=1$

2) $AX^2 \mp BX \mp C$

$A\neq 1$

$$AX^2 \mp BX \mp C=(X \quad \mp \quad)(X \quad \mp \quad)$$

$1=$ A

$B=$ عددين حاصل الجمع أو الطرح

$C=$ عددين حاصل الضرب

❖ تعطي الإشارة الأولى في السؤال للعدد الأكبر إن وجد.

❖ القوس الثاني = حاصل ضرب إشارات السؤال.

Ex:

1) $X^2-8X+7=0$

2) $X^2+5X+4=0$

3) $X^2+X-42=0$

قاعدة

المربع الكامل $(X)^2$ ، $(2)^2$ ، $(9)^2$

العبارة التربيعية (المربع الكامل)

$$X^2+4X+4=0$$
$$(X+2)(X+2)=0 \rightarrow (X+2)^2=0$$

❖ اختبار المربع الكامل:

$$X^2+4X+4$$

X و 2

$$(X*2)X2=4X$$

❖ طريقة التحليل:

$$(X+2)^2$$

- 2: جذر الحدّ الثابت
- $+$: نفس إشارة السؤال
- X: جذر الحدّ الأول

Ex: $X^2-6X+9=(X-3)^2$

❖ تحليل العبارة التربيعية: طريقة عجيبة غريبة

1) $X+\sqrt[3]{X}+2=0$

2) $X^3+3X^{\frac{3}{2}}+2=0$

$A x^2 \mp b x \mp c$ ← $A \neq 1$

طريقة رقم (١) : التجريب

Ex:

1) $2x^2 - x - 6 = 0$

2) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

3) $12x^2 + 16x - 3 = 0$

طريقة رقم (٢) : القانون العام

$$x = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4ac}}{2a}$$

تمرينات

حلّل كل مما يلي:

1) $(x-1)^2 - (3+x)^2 =$

2) $x^4 - 16 =$

3) $x^4+8x=$

4) $x-\sqrt{x}=$

5) $6x^4+18x^2=$

6) $\frac{1}{2}x-1=$

7) $x^4+8x^2+16=$

8) $x^3-8x^2+7x=$

---

٥) التحليل باستخدام التجميع والعامل المشترك

تستخدم هذه الطريقة إذا كان السؤال مكوّن من أكثر من ثلاث حدود.

Ex:

1) $x^3+4x^2+8x+32=$

2) $3x^4+6x^2-x^2-2=$

3) $x^3-x+x^2-1=$

4) $2x^4+16x+x^3+8=$

---

٦) الأصفار النسبية

١) القسمة الطويلة

تستخدم إذا كان المقسوم عليه من أي درجة.

Ex:

1) $\left(x^3+2x^2-x+7\right)\div\left(x^2+2\right)=$

المقسوم — المقسوم عليه

2) $\left(x^4-5x+7\right)\div(3+x)=$

3) $\left(x^3+8\right)\div(x+2)=$

4) $\left(x^4-16\right)\div(x-4)=$

٢) القسمة التركيبيّة

وتستخدم إذا كان المقسوم عليه من الدرجة الأولى فقط.

Ex:

1) $\left(x^3-5x^2+4x+1\right)\div(x+2)=$

2) $\left(x^3+8\right)\div(x+2)=$

3) $\left(x^4-16\right)\div(x-4)=$

الأصفار النسبية

Ex: حلّل كل مما يلي:

1) $2x^3+x^2-13x+6=$

2) $x^3+6x^2+5x-12=$

3) $x^3-3x+2=$

4) $x^2+6x+5=$

5) $x^2-4=$

نظرية الباقي والعوامل

١) إذا كان $g(x)$ عاملاً من عوامل $f(x) \leftrightarrow f(x)$ يقبل القسمة على $g(x)$ دون باقي (يعني الباقي = صفر)

٢) إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)$ يساوي مقدار معيّن فإننا نقول أن $g(x)$ ليس عاملاً من عوامل $f(x)$ (يعني الباقي ≠ صفر).

1) $f(x)=x^2-5x+3$, $g(x)=x-1$

2) $f(x)=x^2+3x+2$, $g(x)=x+1$

3) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}$, $g(x)=x-\frac{1}{2}$

قاعدة

لإيجاد باقي القسمة نستخدم قاعدة بشرط المقسوم عليه من الدرجة الأولى.

مقسوم $= f(x)$ ÷ مقسوم عليه $= g(x)$

$g(x)=ax\mp b$

باقي القسمة $= f\left(\mp\frac{b}{a}\right)$

كثيرات الحدود

هو عبارة عن اقترانات على صورة

$$f(x)=a(x)^{n}\mp b(x)^{n-1}\pm c(x)^{n-2}+....+k$$

حيث أن:

1) n : **عدد صحيح موجب** (n : **الأس**)

2) a , b , c , k : **معاملات أعداد حقيقية**

3) **معرف بقاعدة واحدة (ليس متشعب)**

4) **مكتوب على صورة بسط**

Ex:

1) $f(x)=x^{3}-5x+7$

2) $f(x)=\frac{1}{2}x^{5}+x^{2}-\frac{1}{4}x+6$

3) $f(x)=4x-1$

4) $g(x)=\frac{3x-7}{5}$

5) $h(x)=7$

6) $f(x)=x^2+8x^{-1}-3$

7) $g(x)=x^{\frac{3}{2}}-1$

8) $g(x)=\sqrt{x}+9$

9) $g(x)=\dfrac{4x-2}{x^2+1}$

10) $f(x)=\dfrac{8}{x^{-3}}+x^4$

11) $f(x)=\dfrac{-11}{x}$

12) $f(x)=(4)^x$

13) $f(x)=\text{Log}(x)$

14) $f(x)=\sin x$

15) $f(x)=|x-2|$

16) $f(x)=[x-3]$

17) $g(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\le 1 \\ x+3 & , \quad x>1 \end{cases}$

أنواع الاقترانات كثيرات الحدود وخصائصها

١) الاقتران الثابت

$$y = f(x) = A$$
A عدد ثابت

١) المجال $= R$

٢) المدى $= A$

٣) مقطع $(x) \Leftarrow$ لا يقطع محور (x)

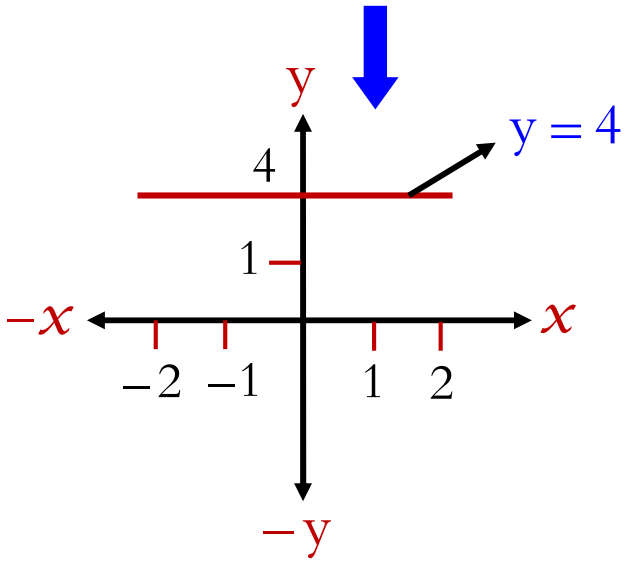
٤) مقطع $(y) \Leftarrow y = A$

٥) ثابت (يعني غير متزايد أو متناقص) $\Leftarrow$ ميل $= \boxed{m = 0}$ دائماً

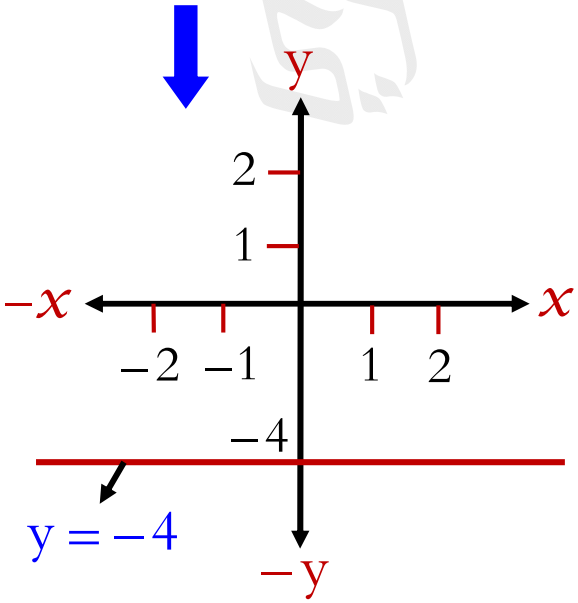
قاعدة

- لإيجاد مقطع الاقتران من محور $(x) \Leftarrow$ نفرض $y = 0$
- لإيجاد مقطع الاقتران من محور $(y) \Leftarrow$ نفرض $x = 0$

مثّل بيانياً: $y = f(x) = 4$



$y = f(x) = -4$



٢) الاقتران الخطي

$y = f(x) = a x \mp b$ حيث $a \neq 0$

a معامل x = الميل = m

مقطع محور الصادات

١) المجال = R

٢) المدى = R

٣) مقطع $(x) \Leftarrow y = f(x) = 0$

$y = a x \mp b \longrightarrow a x \mp b = 0 \Rightarrow x = \frac{\mp b}{a}$

٤) مقطع (y) = العدد الثابت دائما = b

٥) الميل = a = m ← معامل x

Ex:

مثّل بيانياً منحنى الاقتران: $y = f(x) = 2x - 4$

(a = 2، b = −4)

الخصائص:

١) المجال = R

٢) المدى = R

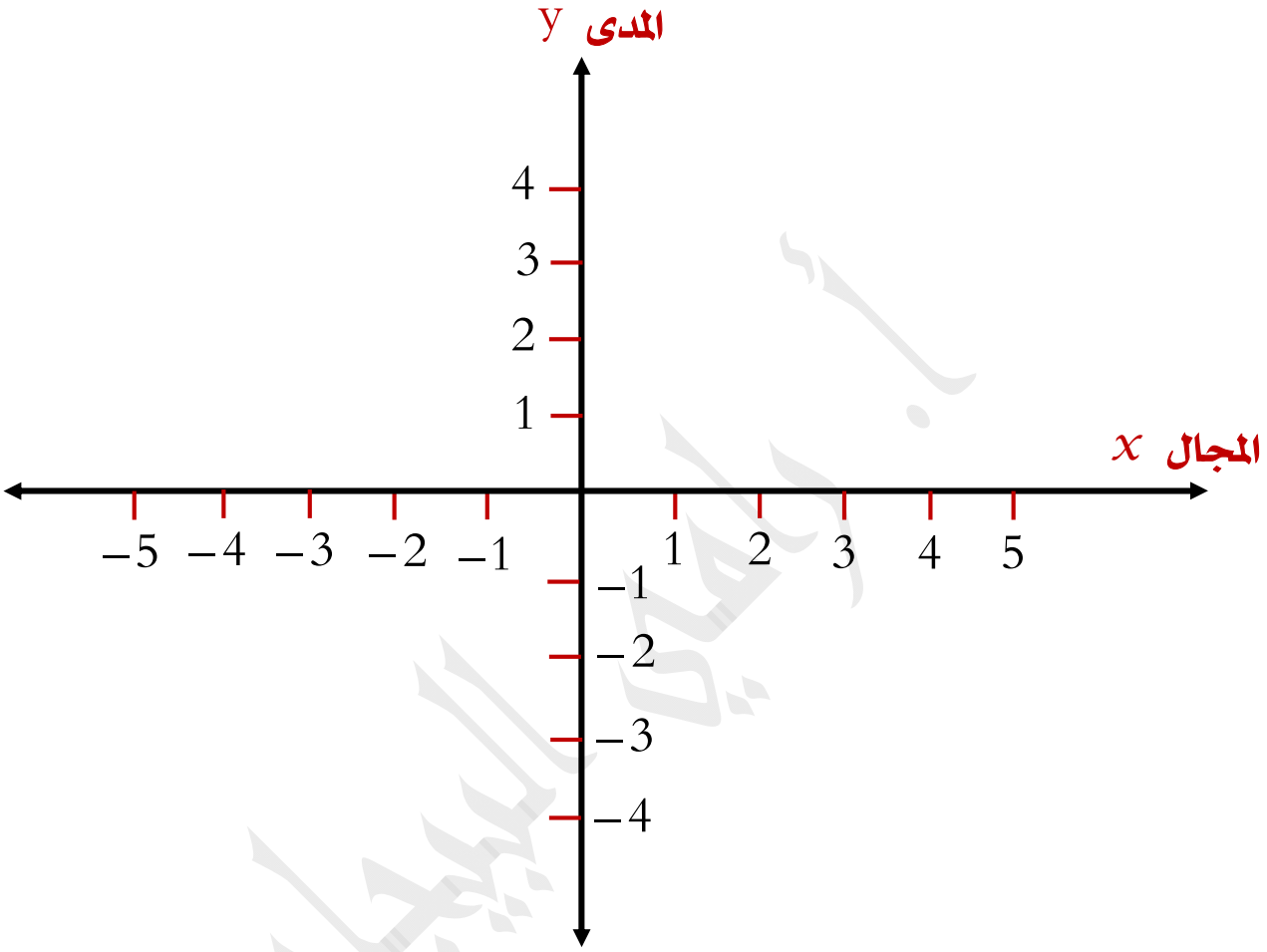
٣) الميل = m = 2

٤) مقطع $(x) = \frac{\mp b}{a} \longrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

٥) مقطع $(y) = b = -4$

قانون الميل رقم [١]

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y									

جد كلاً من مجال / مدى / مقطع (x) / مقطع (y) / ميل الخط المستقيم

Ex:

1) $y = f(x) = -4x + 3$

2) $y = g(x) = 5x$

3) $y = 2 - x$

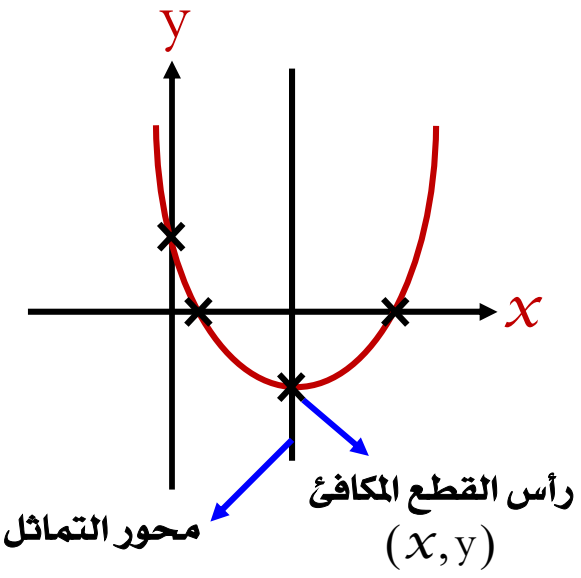
---

٣) الاقتران التربيعي (القطع المكافئ)

$$f(x) = y = ax^2 \mp bx \mp c \quad a \neq 0$$

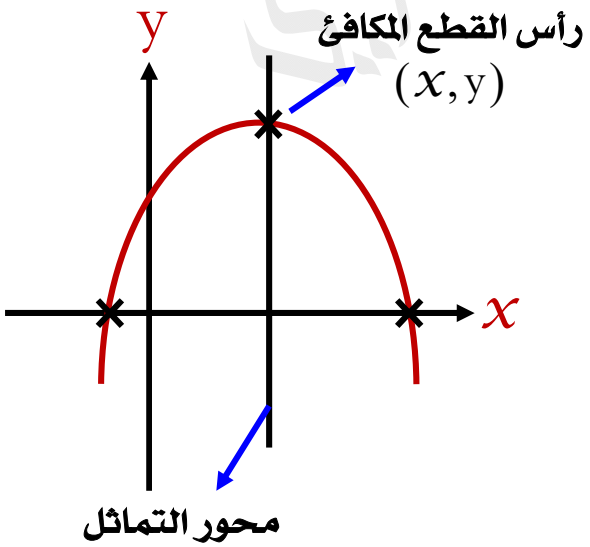
١ $a > 0$

الشكل العام (القطع المكافئ)



٢ $a < 0$

الشكل العام (القطع المكافئ)



الخصائص:

١) المجال $= \mathrm{R}$

٢) المدى $[\, y \, , +\infty)$ إذا كان $a > 0$

$[\, y \, , -\infty)$ إذا كان $a < 0$

٣) مقطع محور $(x) \Leftarrow y = 0 \Leftarrow$ تحليل

٤) مقطع محور $(y) \Leftarrow x = 0 \Leftarrow \boxed{y = c}$ دائما العدد الثابت

٥) مفتوح للأعلى إذا كان $a > 0$ ، مفتوح للأسفل إذا كان $a < 0$

٦) رأس القطع المكافئ $(x \ , \ y)$

$$x = \left(\frac{\mp b}{2a}\right) \qquad f\left(\frac{\mp b}{2a}\right)$$

٧) معادلة محور التماثل $\Leftarrow$ $\boxed{x = \frac{\mp b}{2a}}$

مثّل بيانياً منحنى الاقتران (القطع المكافئ) ثم أوجد جميع الخصائص Ex:

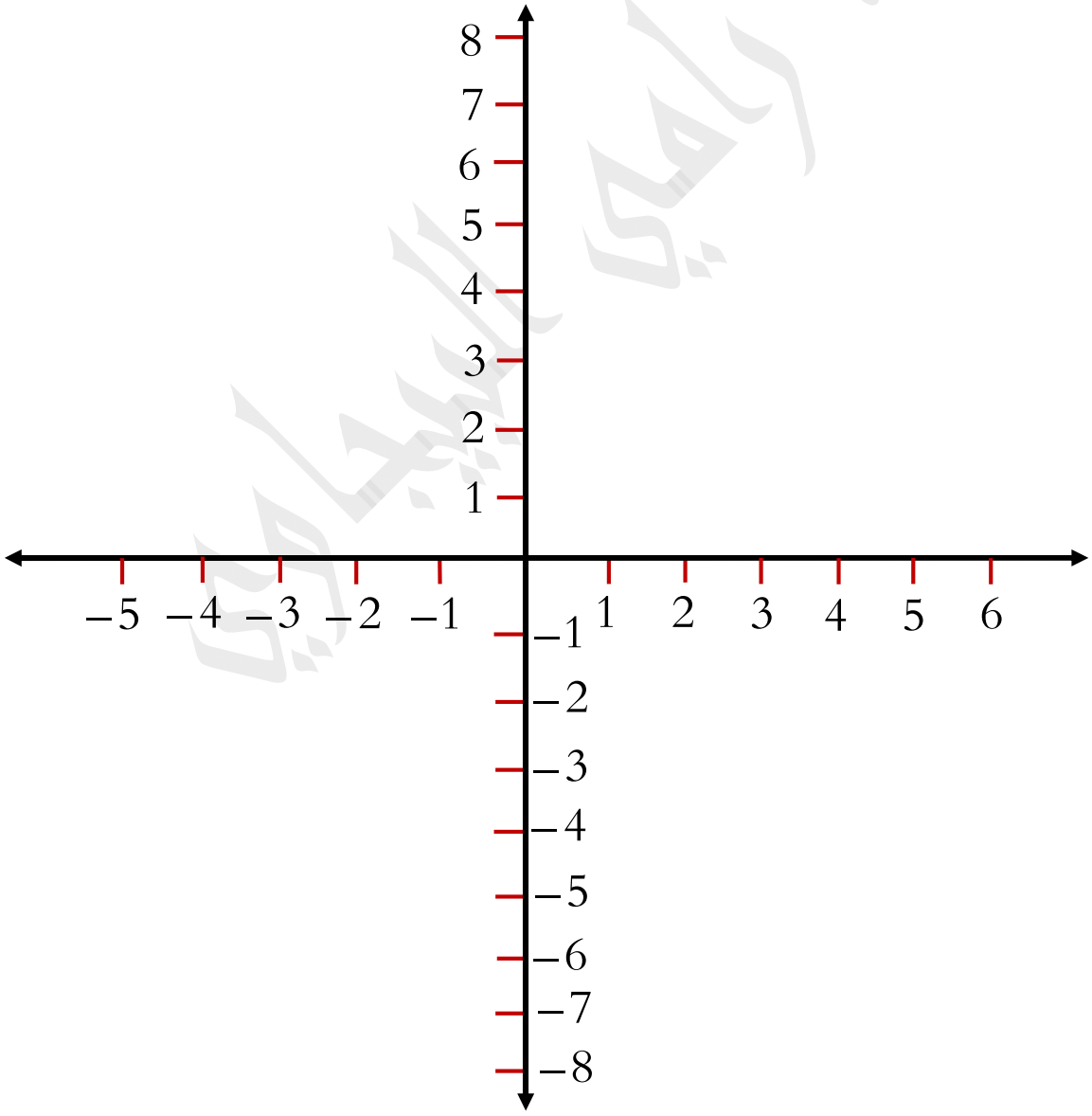
1) $y = f(x) = x^2 - 4x - 5$

الخصائص:

١) المجال ٢) المدى ٣) رأس القطع المكافئ

٤) معادلة محور التماثل ٥) مقطع السينات ٦) مقطع الصادات

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y									



مثل كل من الاقترانات الآتية بيانياً دون استخدام الجدول

Ex:

1) $f(X)=X^2-4$

2) $F(X)=X^2+6X+9$

3) $F(X)=1-X^2$

4) $F(X)=X^2+2X+4$

قانون المميّز

B^2-4AC

يساوي ZERO	موجب	سالب
يحلل وله جذر واحد $X=$	يحلل وله جذران X_1, X_2	لا يحلل لا يوجد له جذر
يمس محور X في نقطة واحدة	يقطع محور X في نقطتين	لا يقطع محور X

٤) الاقتران التكعيبي

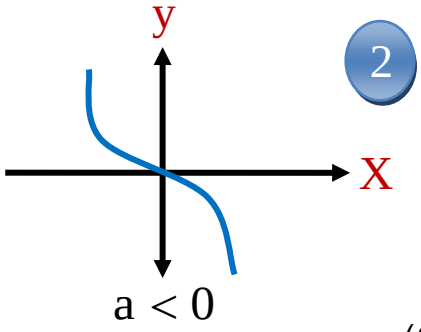
$$y=f(x)=ax^3\mp bx^2\mp cx\mp D \quad , a\neq 0$$

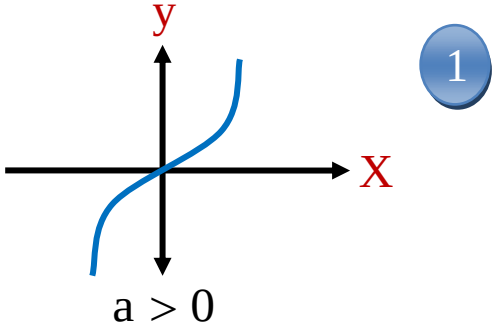
١) المجال $R=$

٢) المدى $R=$

٣) مقطع (x) $\leftarrow y=0$

٤) مقطع الشكل العام (y) $\leftarrow$ $\boxed{x=0}$





مثل كل من الاقترانات الآتية بيانياً دون استخدام الجدول

Ex:

1) $y=x^3$ 2) $y=-x^3$ 3) $y=x^3-1$ 4) $y=1-x^3$

❖ دراسة إشارة الاقتران؟؟

خطوات الحل:

١) $f(x)$ (نقاط التقاطع مع المحور (x))

٢) خط الأعداد لوضع الإشارة

أ) الاقتران الثابت $\boxed{f(x)=A}$ ثابت

$f(x)=4 \rightarrow f(x)=0 \rightarrow (x)$ لا يقطع محور

ملاحظة

الإشارة تدل على أن الاقتران مرسوم (فوق/تحت) محور (x)، ولا يقطع محور (x)

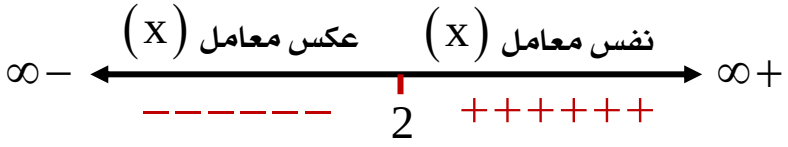
❖ مجال R = لكل كثيرات الحدود (يعني دائماً معرّف)

ب) الاقتران الخطي مجال R

$f(x)=a\,x\,f\,b=0$

Ex: $f(x)=2x-4=0 \rightarrow \boxed{x=2} \rightarrow (x)$ التقاطع مع

خط الأعداد



الإشارة الموجبة تعني $f(x)$ **أن مرسوم فوق محور** (x)

الإشارة السالبة تعني أن $f(x)$ **أن مرسوم تحت محور** (x)

مثل بيانيا:

Ex: $f(X)=2X-4$

جـ) الاقتران التربيعي $f(x)=ax^2 \mp bx \mp c$

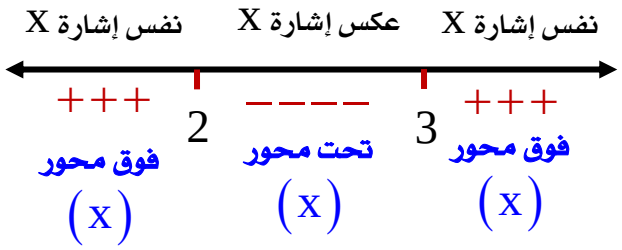
مجال $= R$

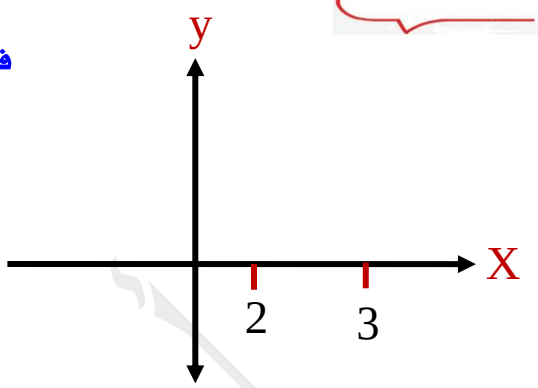
$f(x)=x^2-5x+6=0 \qquad (x-3)(x-2)=0$

$x=3\ ,\ x=2$

❖ حالات دراسة الإشارة:-

١) له جذران



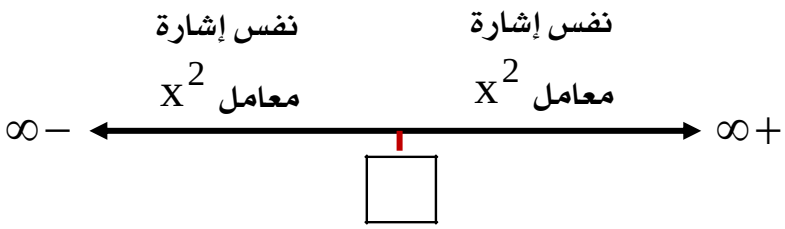


---

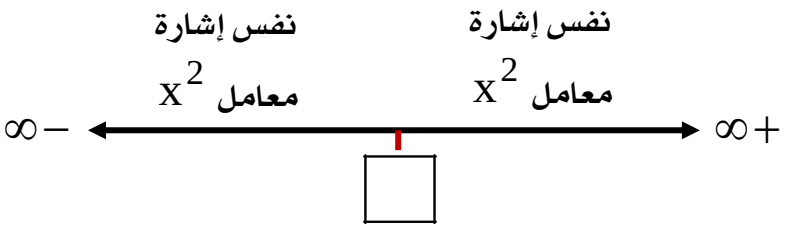
٢) له جذر واحد

$$B^2-4ac=0 \leftarrow \text{صفر} = \text{المميّز} \leftarrow (ax\mp b)^2 \leftarrow \text{مربع كامل} \leftarrow$$

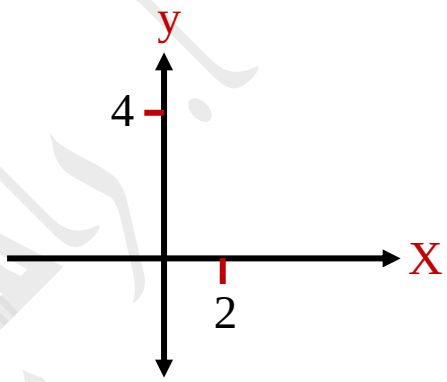
Ex: 1) $f(X)=X^2+2X+4$



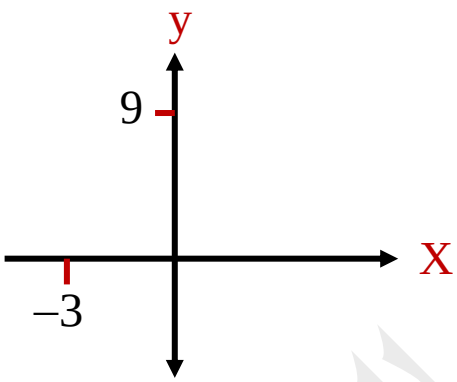
2) $f(X)=X^2-6X+9$



$f(X)=X^2+2X+4$



$f(X)=X^2-6X+9$



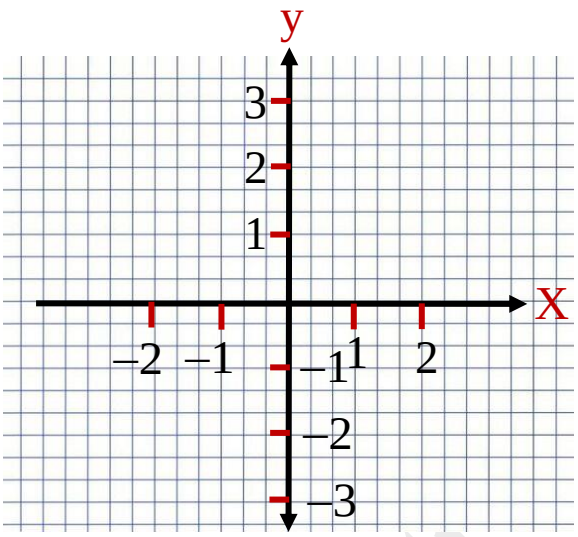
٣) لا يوجد له جذر

$B^2 - 4ac < 0$ ← المميّز سالب ← (لا يحلل) ←

Ex: $f(X) = X^2 + X + 2 \rightarrow B^2 - 4ac =$

إشارة معامل X^2 نفس

$\infty -$ ⟷ $\infty +$



ملاحظة

١) مجال اقتران الجذر التكعيبي $= R$

٢) مدى اقتران الجذر التكعيبي $= R$

$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$, n عدد فردي

❖ مجال اقتران الجذر الزوجي، $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$, n عدد زوجي

❖ دراسة المجال على خط الأعداد

انتبه خطير جداً

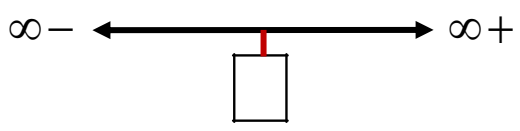
قاعدة

$f(x)=\sqrt[2]{g(x)}$

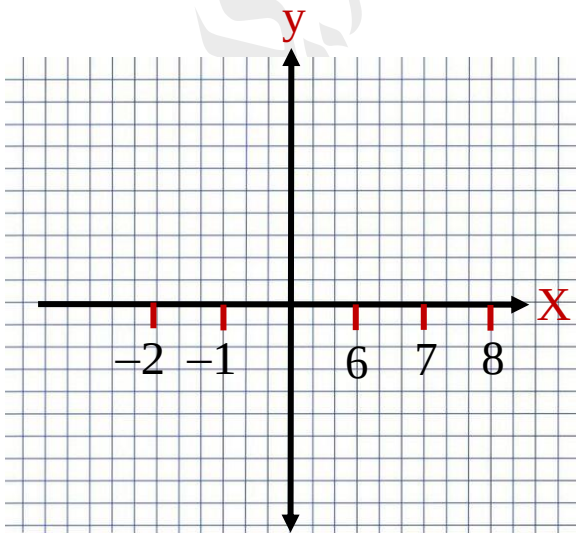
المجال $g(x) \geq 0$

المدى $= R$ ←

فكرّ لماذا

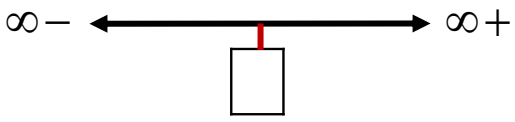


Ex: 1) $f(X)=\sqrt{X-7}$



المجال $X \in [\quad , \quad)$

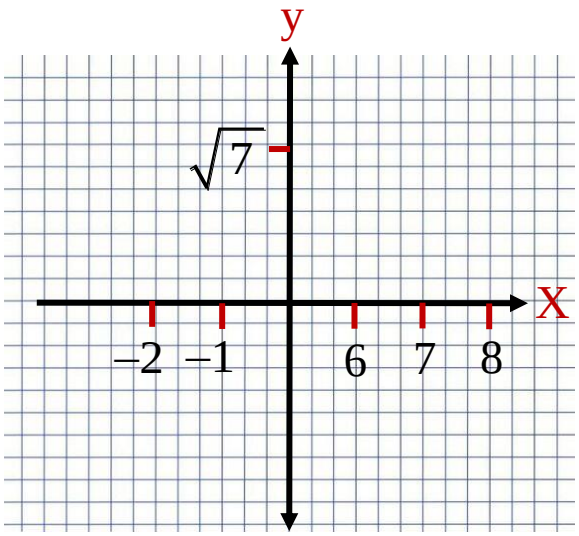
المدى $y \in [\quad , \quad)$



المجال $X\in(\quad,\quad]$

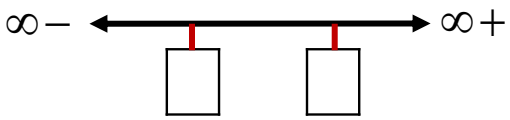
المدى $y\in[\quad,\quad)$

Ex: 2) $f(X)=\sqrt{7-X}$

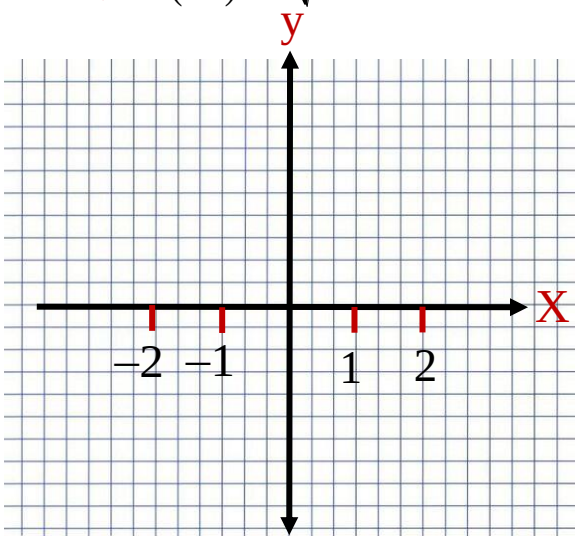


أ. رامي البيجاوي

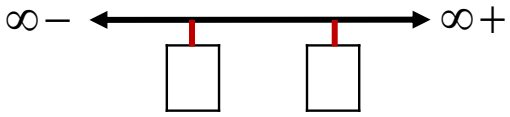
أ. رامي البيجاوي
0788565614



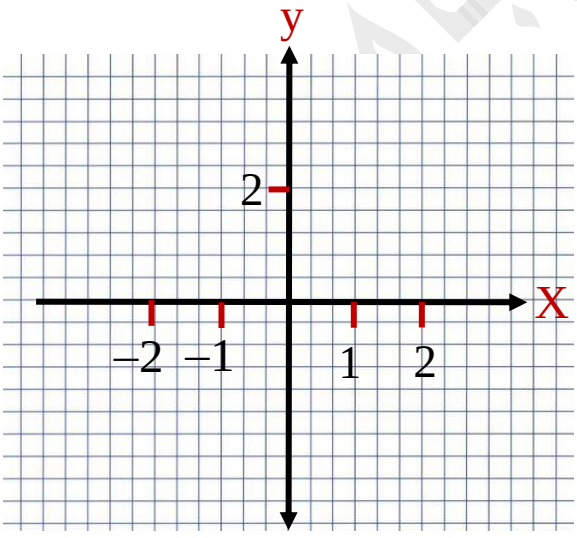
Ex: 3) $f(X)=\sqrt{X^2-4}$



المجال $X\in(\quad,\quad]\cup[\quad,\quad)$

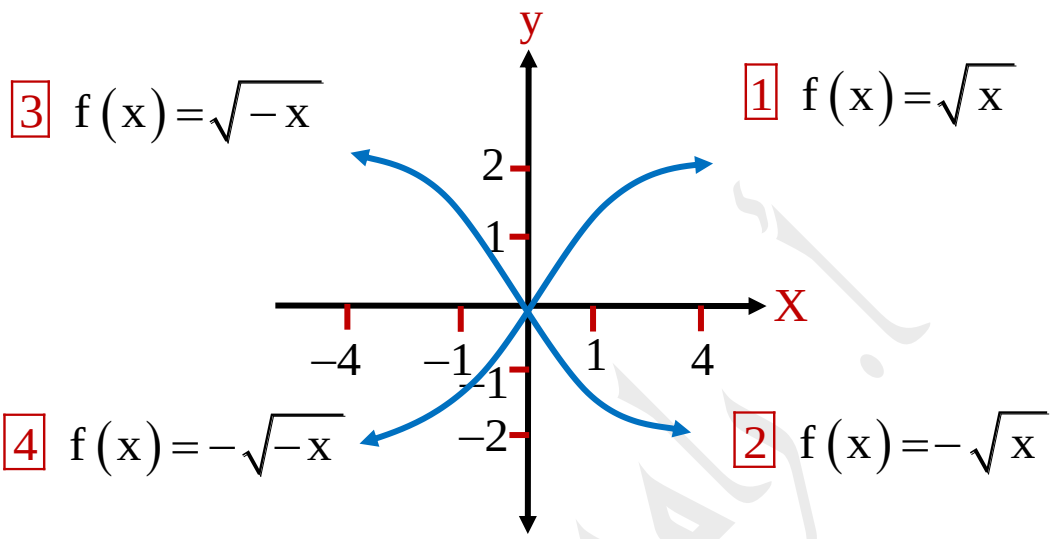


Ex: 4) $f(X)=\sqrt{4-X^2}$



المجال $X\in[\quad,\quad]$

أشكال الجذور الزوجية



3 $f(x)=\sqrt{-x}$

1 $f(x)=\sqrt{x}$

4 $f(x)=-\sqrt{-x}$

2 $f(x)=-\sqrt{x}$

الاقتران النسبي

تعريف:- أي اقتران على صورة بسط ومقام يسمى اقتران نسبي بشرط البسط والمقام كثيرات حدود.

Ex:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

2) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

5) $f(x)=\dfrac{(x)^{\frac{3}{2}}+5x}{x^2}$

انتبه

ملاحظة

مجال الاقتران النسبي يساوي

$$R = \left\{ \begin{array}{c} \text{صفر} \\ \text{المقام} \end{array} \right\}$$

خطير جداً

❖ تمثيل الاقتران النسبي:-

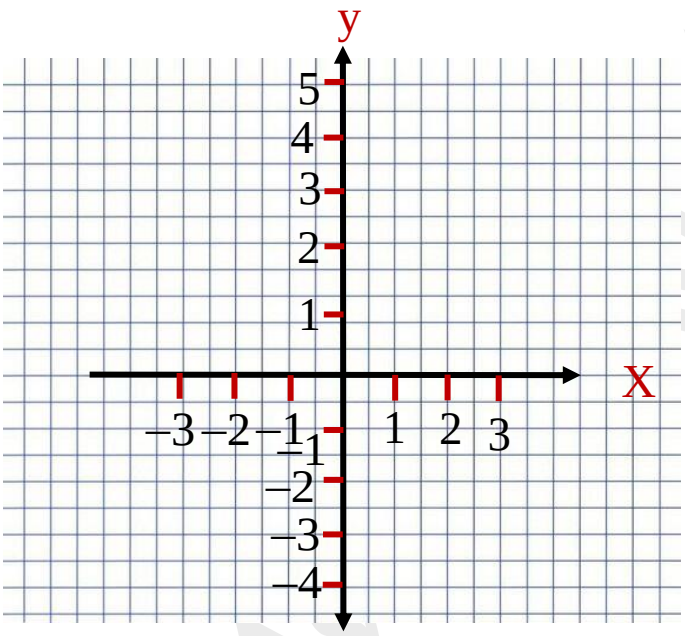
مثل بيانيا

Ex: 1) $f(X) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

١) نجد المجال، المدى.

٢) تحليل واختصار.

٣) رسم الاقتران.



Ex: 2) $f(X) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

الاقتران الكسري

هو اقتران يحتوي على جذر في البسط أو المقام أو كلاهما.

ملاحظة

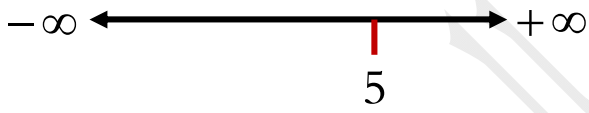
لا لا لا تلعب بشكل السؤال.

$$1)\ f(x)=\sqrt{\frac{x^2-25}{x-5}}$$

❖ **طريقة تحديد المجال:**

١) مجال البسط : $x^2-25=0$

٢) مجال المقام : $x-5=0$



٣) إشارة $\frac{x^2-25}{x-5}$

سؤال :- **جد المجال للاقتران :**

$$2)\ f(x)=\sqrt{\frac{x-4}{x-6}}$$

❖ **طريقة تحديد المجال**

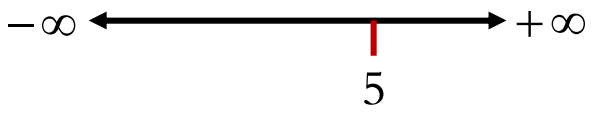
$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-25}}{\sqrt{x-5}}$$

ملاحظة

لا لا لا تلعب بشكل السؤال.

مجال البسط :

مجال المقام :



قاعدة

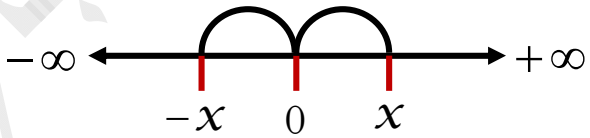
مجال $f(x)$ = مجال البسط $\cap$ مجال المقام − { صفر المقام }

سؤال :- حدّد مجال $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

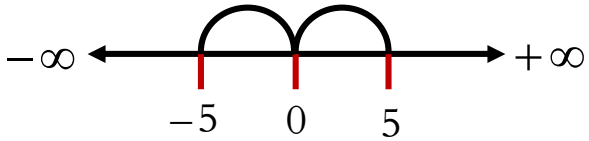
اقتران القيمة المطلقة $f(x)=|g(x)|$

تعريف : القيمة المطلقة (x) هو $|x|$ وهو بعد النقطة (x) عن نقطة الأصل.

* $|x|\geq 0$



* $|-5|=5$ ، $|5|=5$



* $\sqrt{x^2}=|x|$

$\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$

❖ **اقتران القيمة المطلقة هو اقتران غير صريح (يعني لازم نعيد تعريفو) أي تحويله إلى اقتران متشعب.**

أعد تعريف : أ) $f(x)=|x-2|$

١) **دراسة إشارة** $f(x)$

٢) $f(x)=\begin{cases} & , \quad x\geq \\ & , \quad x< \end{cases}$

ب) $f(x)=|x^2-4x|$

خصائص القيمة المطلقة

1 $|x|=A \Rightarrow x=A \quad \text{or} \quad x=-A$

حل المعادلة التالية :

1) $|x-2|=4$

2) $|2x-1|=6$

2 $|a \times b| = |a| * |b|$

3 $\left|\frac{a}{b}\right| \Leftrightarrow \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

4 $|a \mp b| \neq |a| \mp |b|$

5 $|f(x)| < a \rightarrow -a < f(x) < a$ (متباينة مطلق)

6 $|f(x)| \leq a \rightarrow -a \leq f(x) \leq a$

Ex: $|x-3| < 5 \rightarrow -5 < x-3 < 5$

$+3 < +3 < +3$

$2 < x < 8$

7 $|f(x)| > a \rightarrow f(x) > a$ or $f(x) < -a$

8 $|f(x)| \geq a \rightarrow f(x) \geq a$ or $f(x) \leq -a$

Ex: $|x-3| \geq 5 \rightarrow x-3 \geq 5$ or $x-3 \leq -5$

$+3 \quad +3 \qquad +3 \quad +3$

$x \geq 8$ or $x \geq -2$

Ex: مثّل كل من المتباينات الآتية على خط الأعداد

1) $x > 2$

2) $x \leq 2$

3) $1 < x \leq 4$

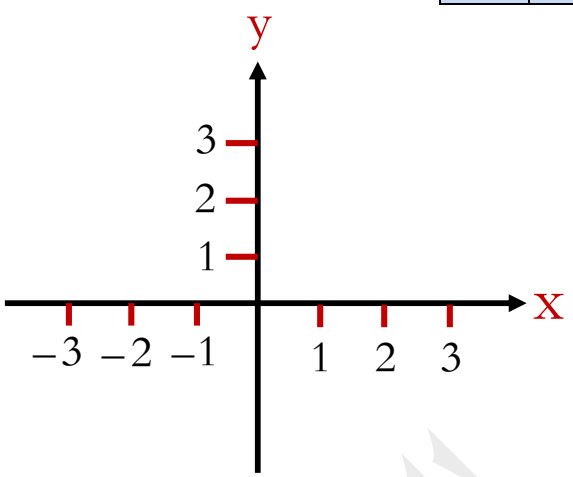
4) $x > 4$, $x \leq -2$

تمثيل اقتران القيمة المطلقة بيانيا

$$f(x)=|\,g(x)\,|$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								

Ex: 1) $f(x)=|x|$



الخصائص :-

١) المجال : R

٢) المدى : R^+

Ex: 2) $f(x)=|x+2|$

Ex: 3) $f(x)=|x-2|$

الاقتران الأسي

$$f(x)=(a)^{g(x)}$$

الشروط :

١) الأساس $=\{1\}-R_+^* \Leftarrow (a)$

٢) الأس $=g(x)=$ اقتران خطي $=ax\mp b$

Ex: 1) $f(x)=(3)^x$, 2) $f(x)=5\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$, 3) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2x}$

❖ **الاقتران الأسي الطبيعي :** $f(x)=(e)^{g(x)}$

العدد النيبيري

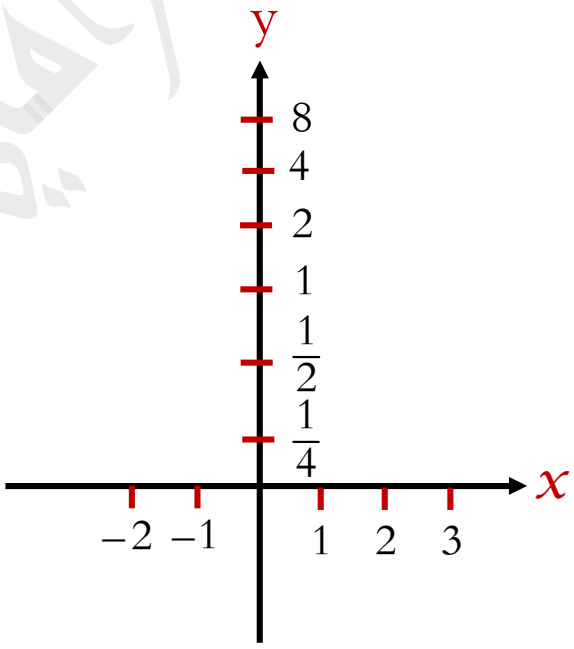
تمثيل الاقتران الأسي بيانيا

$$f(x)=(a)^{g(x)} \quad , \quad f(x)=(e)^{g(x)}$$

❖ مثل الاقتران التالي بيانيا :

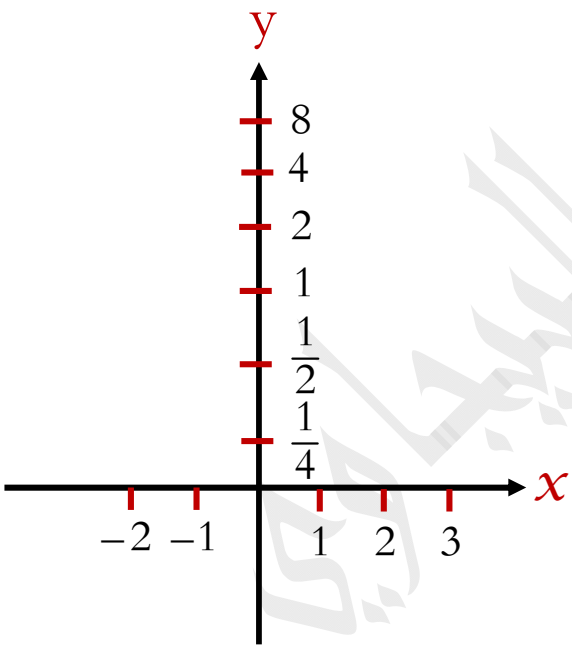
$$f(x)=(2)^{-x}$$

x	-2	-1	0	1	2	3
y						



$$f(x)=(2)^{x}$$

x	-2	-1	0	1	2	3
y						



الخصائص :-

١) **المجال :** R ٢) **المدى :** R^+ ٣) **مقطع** (x) **: لا يوجد**

٤) **مقطع** $(y) = \boxed{1}$

قاعدة

١) $(a)^x$ دائما متزايد

٢) $(a)^{-x}$ دائما متناقص

❖ **مثل بيانيا** $f(x)=e^{-x}$, $f(x)=e^{x}$ **دون استخدام الجداول**

❖ **مثل بيانيا دون استخدام الجداول :-**

1) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

2) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

الاقتران اللوغاريتمي

$$f(x)=\log_b a = c$$

بشروط :-

١) $a>0$ ٢) $b>0$, $b\neq 1$

❖ حوّل من صورة لوغاريتم إلى صورة أسس :

$$\log_b a = c \Leftrightarrow a = (b)^c$$

Ex: 1) $\log_2 8 = 3 \Rightarrow 8 = (2)^3$

2) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3 \Rightarrow$

3) $\log_4 64 = 3 \Rightarrow$

قواعد اللوغاريتم

1) $\log_b a = c \Leftrightarrow a = (b)^c$ $\quad a > 0 , b > 0 , b \neq 0$

انتبه

2) $\log_a a = 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \ , \ \log_3 3 = 1$

3) $\log_a 1 = 0 \rightarrow \log_5 1 = 0 \ , \ \log_{\frac{1}{4}} 1 = 0$

4) $\log_c (a \times b) = \log_c a + \log_c b \rightarrow \log_5 (2 \times 4) = \log_5 2 + \log_5 4$

5) $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b \rightarrow \log_2 \frac{7}{3} = \log_2 7 - \log_2 3$

6) $\log_c (a + b) \rightarrow$ لا تفكر تحلها

7) $\log_b (a)^n = n \log_b a \rightarrow \log_5 (3)^4 = 5 \log_4 3$

8) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \rightarrow \log_7 2 = \frac{1}{\log_2 7}$

9) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \rightarrow \log_2 6 = \frac{\log_3 6}{\log_3 2}$

10) $(a)^{\log_a b} = b \rightarrow (5)^{\log_5 2} = 2$

11) $(a)^{\log_a (b)^n} = (b)^n \rightarrow (4)^{\log_4 (3)^5} = (3)^5$

12) $\log_c a = \log_c b \leftrightarrow a = b \rightarrow \log_2 3 = \log_2 b \rightarrow b = 3$

❖ **جد قيمة كل مما يلي :**

1) $\log_2 16 =$

الحل : $\log_2 16 = \log_2 (2)^4 = 4$ ← **حوّل إلى صورة أس**

2) $\log_7 \sqrt{7} =$

3) $\log_{10} 0.01 =$

4) $\log_8 \frac{1}{8} =$

5) $\log_9 3 =$

6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} =$

7) $\log_8 1 =$

8) $(6)^{\log_6 11} =$

9) $(5)^{\log_6 36} =$

10) $\log 1000 =$

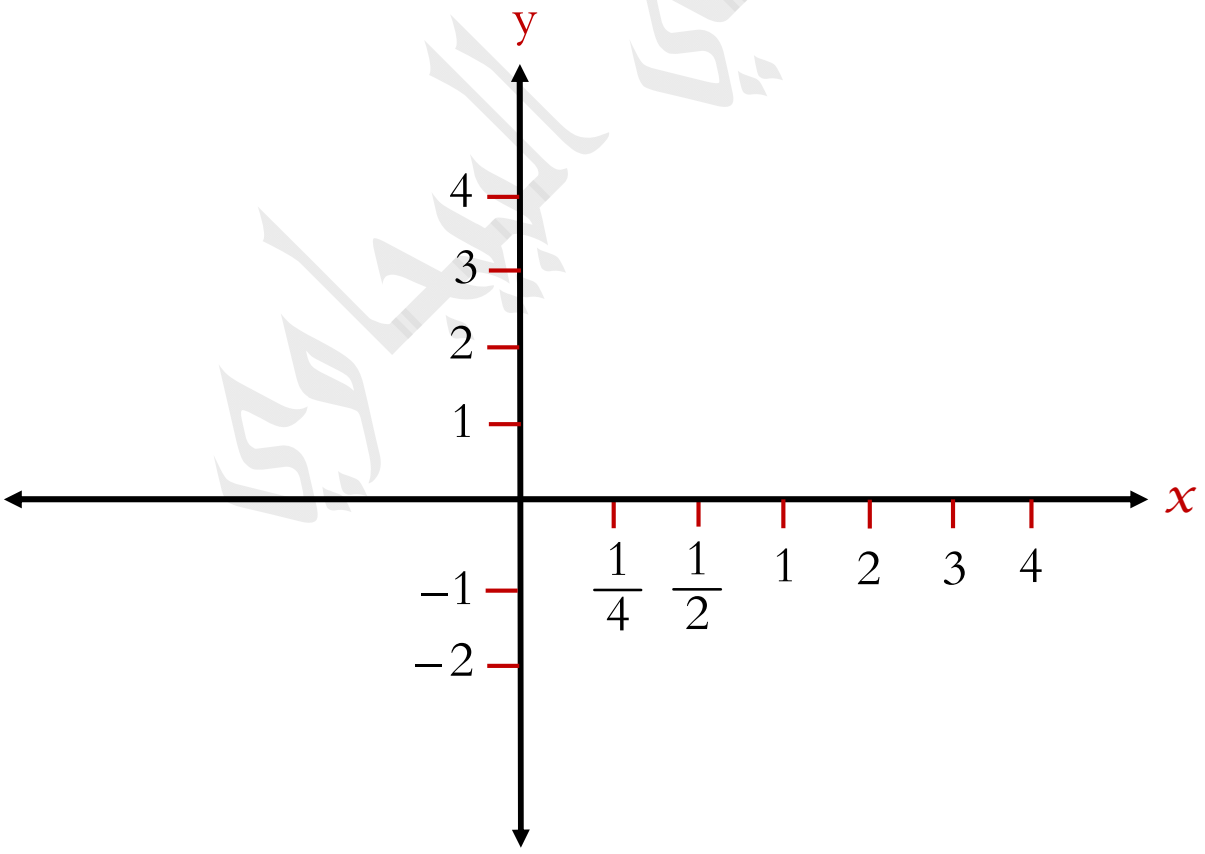
لوغاريتم اعتيادي $\Leftrightarrow \log_{10}$

الأساس $= 10$

Ex (1): تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانيا وخصائصه

$f(x) = \log_2 x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



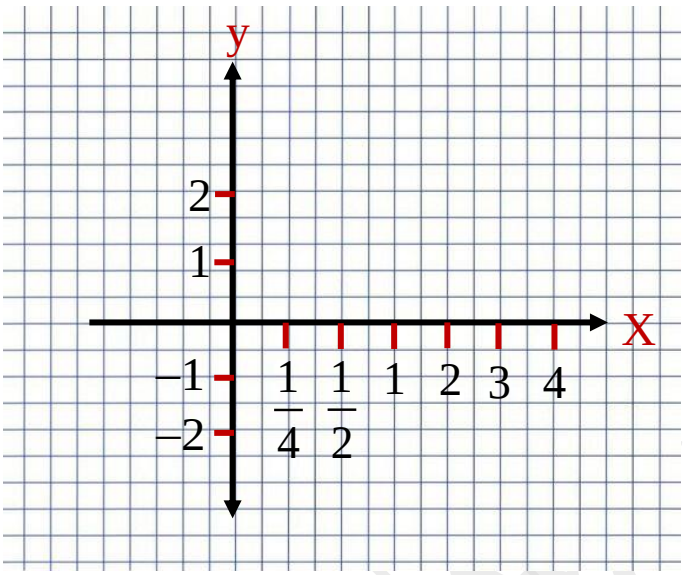
❖ **خصائص الاقتران** $f(X)=\text{Log}_b^x$ ، b : **عدد صحيح :-**

١) **المجال** R_+^* ٢) **المدى** $R=$ ٣) **الاقتران المتزايد** $\boxed{b<1}$

٤) **مقطع** $(X)=1$ ٥) **مقطع** (y) **لا يقطع**

مثل بيانياً

Ex: 2) $f(X)=\text{Log}_{\frac{1}{2}}^x$



X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y						

خصائص الاقتران $0<b<1$, $f(X)=\text{Log}_b^x$

نفس الخصائص السابقة ولكن
متناقص لأن $0<b<1$

اقتران لوغاريتمي طبيعي $f(X)=\text{Ln}(x)$

❖ **الأساس** $(e)=$ **العدد النيبيري** ≈ 2.7

استخدم خصائص الأسس لتبسيط كل مما يلي:-

1) $\text{Log}_4 5x^3 y$

2) $\text{Ln}\dfrac{\sqrt{3x-5}}{7}\ ,\ x>\dfrac{5}{3}$

3) $\text{Log}_a \dfrac{x^2 y^5}{z^4}$

4) $\text{Ln}\left(a^2\sqrt{a-1}\right)\ ,\ a>1$

حل المعادلات:-

تعريف ١: $aX \mp b=0 \leftarrow$ مقدار جبري $=$ صفر

تعريف ٢: حل المعادلة هو إيجاد قيم (X) التي تحقق المعادلة (جذور المعادلة).

تعريف ٣: حل المعادلة $=$ جذور المعادلة $=$ أصفار الاقتران $=$ نقاط التقاطع مع محور (X)

خطوات حل المعادلة:

١) تحليل "طرق التحليل السابقة"

٢) استخدام قاعدة $AXB=0$

$AXB=0$ OR
- $A=0$ ← (1)
- $B=0$ ← (2)

ملاحظة

قبل حل المعادلة التربيعيّة $AX^2 \mp BX \mp C$ يجب

استخدام المميز (B^2-4ac)

- $0=$ ← تحلل ← جذر واحد
- $0<$ ← تحلل ← جذران
- $0>$ ← تحلل ← لا يوجد جذور

تمرين

حل كل من المعادلات الآتية:

Ex:

1) $4X^2-16=0$

2) $(X-1)^2-9=0$

3) $(X+2)^2-4(X-1)^2=0$

4) $8X^3-64=0$

5) $(X+1)^3-8=0$

6) $X^2-7X+6=0$

7) $X+3\sqrt{X}+2=0$

8) $(X)^3-4(X)^{\frac{3}{2}}+3=0$

9) $X^2+10X+25=0$

10) $9X^2+12X+4=0$

11) $2X^2+10X+12=0$

12) $2X^2+5X-3=0$

13) $12X^2+2X-2=0$

14) $8X^2+10X-2=0$

15) $12X^2+2X-4=0$

16) $X^3-3X+6=0$

17) $2X^3+X^2-13X+6=0$

18) $X^3-3X+2=0$

19) $X^4+6X^3+7X^2-6X-8=0$

20) $2X^2-X-21=0$

❖ **القسمة الغبية:-**

حل المعادلة الآتية:

خطوات الحل:

١) توحيد الأساس.
٢) استخدام خصائص الأسس.
٣) حل المعادلة.

قاعدة

$$(X)^a=(X)^b \rightarrow \boxed{a=b}$$

الأساس متساوي ← القوة متساوية

Ex:

1) $(4)^{2x+3}=16$
2) $(25)^{x+3}=(125)^{4x-6}$
3) $(4)^x+(2)^x-12=0$
4) $(9)^x+(3)^x-20=0$
5) $(3)^{x^2+4x}=\frac{1}{27}$
6) $(2)^{x^2-4}=1$ مهم
7) $(3)^{5x}(9)^{x^2}=27$
8) $(e)^{x^2}=(e)^4$
9) $\left|(2)^x-1\right|=3$
10) $(e)^{|x-3|}=(e)^7$
11) $(8)^x+3(2)^x-4=0$
12) $(125)^x+4(5)^{x+1}-21=0$
13) $(4)^x+3(2)^{x+1}-7=0$

حل معادلة اللوغاريتم

$$\text{Log}_a^x = b$$

خطوات الحل:

١) استخدام خصائص اللوغاريتم.
٢) حوّل إلى صورة أسس.
٣) حل المعادلة وتحقق من الحل $x>0$, $\text{Log}_a^x = b$.

Ex:

1) $\text{Log}_3^x = -2$

2) $\text{Log}_{\frac{1}{4}}^x = 3$

3) $\text{Log}^x + \text{Log}^{(x+3)} = 1$

4) $\text{Log}_5^{(x+6)} + \text{Log}_5^{(y+2)} = 1$

5) $\text{Log}^{(x+5)} - \text{Log}^{(x-3)} = \text{Log}^2$

6) $\frac{1}{3}\text{Log}_3^{(x-3)} = \text{Log}_3^4$

أ. رامي البيجاوي

الكسور الجزئية

$\frac{A}{ax \mp b}$ ← ثابت
← خطي
مقدار نسبي

١) درجة البسط أقل من درجة المقام.

Ex:

1) $\frac{2X-13}{X^2-X-2}$

2) $\frac{X}{X^2-5X+6}$

3) $\frac{2X-5}{(X+2)(X-3)}$

---

٢) درجة البسط $\leq$ درجة المقام:-

❖ أولاً قسمة طويلة

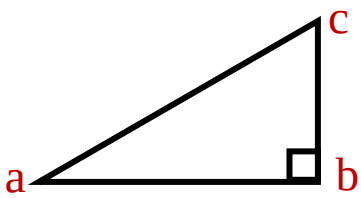
1) $\frac{2X^2+13X+16}{X^2+6X-16}$

2) $\frac{3X^2+12X+4}{X^2+X}$

3) $\frac{X^3+12X^2+33X+2}{X^2+8X+15}$

المثلثات

١) المثلث القائم الزاوية.



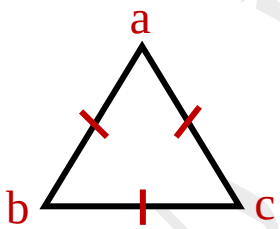
ab = ضلع القائم

bc = ضلع القائم

ac = الوتر

نظرية فيثاغورس:- $(ac)^2 = (ac)^2 + (bc)^2$

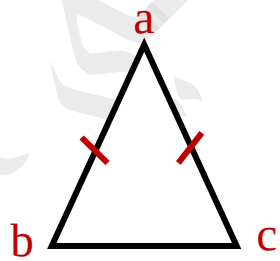
٢) المثلث متساوي الأضلاع.



1) $ab = bc = ac$

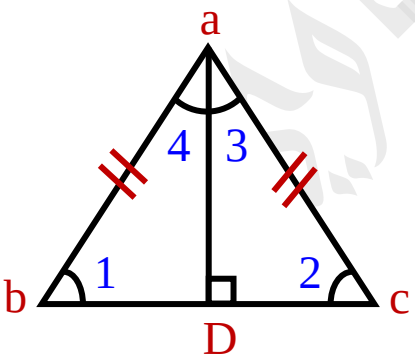
2) $\measuredangle a = \measuredangle b = \measuredangle c = 60^\circ$

٣) المثلث متساوي الضلعين



1) $ab = ac$

2) $\measuredangle a = \measuredangle c$



قاعدة

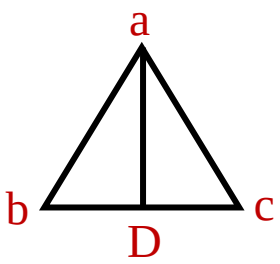
العامود النازل من رأس المثلث متساوي الأضلاع أو متساوي الضلعين ينصف القاعدة وينصف زاوية الرأس

$aD \perp bc \rightarrow bD = Dc$

$\rightarrow \measuredangle 4 = \measuredangle 3$

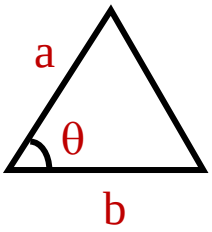
قوانين المساحة

١) $A=\frac{1}{2}\,bc * aD$



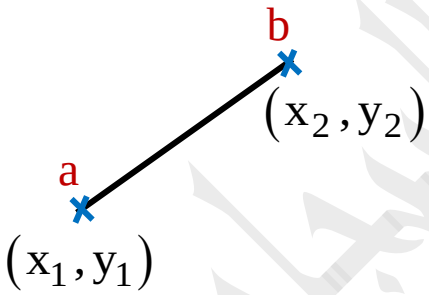
٢) مساحة المثلث إذا علم ضلعين وزاويه محصورة بينهما

$$A = a * b * \sin\theta$$



➢ **مثال:** $a=10\,cm\ ,\ b=12\,cm\ ,\ \theta=3$

قانون المسافة بين نقطتين

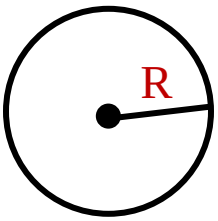


$$D=\sqrt{(\Delta X)^2+(\Delta y)^2}$$

➢ **مثال:** جد المسافة بين النقطتين a , b حيث أن $a=(3,5)\ ,\ b=(7,10)$

مساحة الدائرة

$$A=\pi R^2$$



R = نصف القطر

محيط الدائرة

$$A=2\pi R$$

❖ معادلة الخط المستقيم :

الصورة العامة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(x_1 , y_1) : نقطة تقع على الخط

m : ميل الخط المستقيم

الصورة القياسية

$$mx \mp by + c = 0$$

تذكر

$y = f(x) = mx \mp b$ الاقتران الخطي

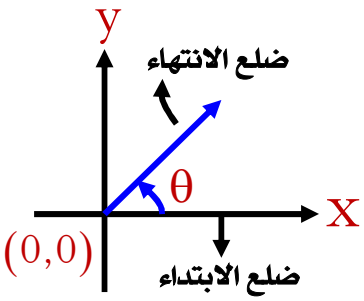
❖ طرق إيجاد ميل الخط المستقيم:

١) $m =$ معامل $(x) \leftarrow y = f(x) = mx \mp b \leftarrow$ اقتران خطي

٢) $m =$ معامل $(x) \leftarrow mx + by + c = 0 \leftarrow$ إذا كان الخط المستقيم على صورة معادلة يجب أن يحوّل إلى اقتران $y = f(x) = mx \mp b$

٣) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leftarrow$ تستخدم إذا أعطى نقطتين على الخط المستقيم.

٤) $m = \tan\theta \leftarrow$ تستخدم إذا أعطى $\tan\theta$ حيث أن $\theta =$ زاوية ميل الخط المستقيم عن محور (x) الموجب والزاوية في الوضع القياسي.



انتبه

θ : زاوية حادة

٥) $m = f'(x) =$ يدرس لاحقاً. مهم جدا

تمارين

جد ميل الخط المستقيم في كل حالة مما يلي :

Ex: 1) $f(x)=y=4x-3$

2) $y-3x+4=0$

3) $y-4=5x$

4) $y-3=7(x-2)$

5) $3x-2y+5=0$

6) $(2,4),(-3,6)$

7) $\theta=45^\circ\ ,60^\circ\ ,90^\circ$

8) $\theta=135^\circ\ ,150^\circ\ ,210^\circ$

معادلة الخط المستقيم

شروط المعادلة:
١) (x_1,y_1) نقطة على الخط
٢) ميل $= m$

اكتب معادلة الخط المستقيم في كل حالة مما يلي:

١) يمر بالنقطة $(-2,6)$ ، $m=3$

٢) يمر بالنقطتين $(4\ ,3),(5\ ,2)$.

٣) يمر بالنقطة $(4\ ,4)$ ، وزاوية ميله $= 45^\circ$

٤) يمر بالنقطة $(4\ ,\ 4)$ ، وزاوية ميله $= 135^\circ$

٥) يقطع محور (x) في النقطة $(7\ ,\ 0)$، وميله $= -4$

٦) يقطع محور (y) في النقطة $(0\ ,\ -3)$، وميله $= 2$

$L_1 \parallel L_2$ بشرط $m_1 = m_2$

$L_1 \perp L_2$ بشرط $L_1 * L_2 = -1$

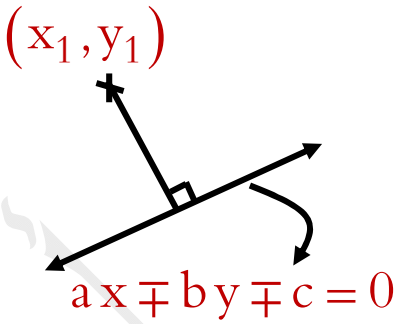
1) $y_1 = 2x - 4 \quad , \quad y_2 = 5 + 2x$

2) $y_1 = \frac{x}{3} - 1 \quad , \quad y_2 = -3$

3) $y_1 = 2 - 8x \quad , \quad y_2 = \frac{1}{2} + x$

قانون المسافة بين نقطة وخط مستقيم

$$D = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



❖ **شرط استخدام القانون:** **(انتبه)**

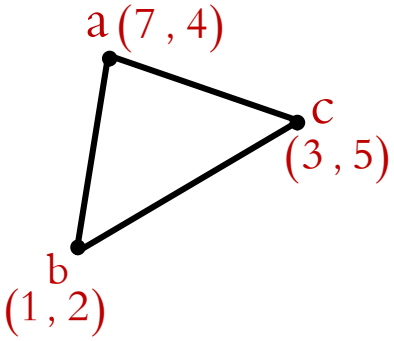
يجب أن يكون أحد أطراف معادلة الخط المستقيم $= \text{zero}$

تمرين

Ex:

١) جد بعد النقطة $(-2 , 4)$ **عن المستقيم الذي معادلته** $3x - 4y = 6$

٢) جد مساحة المثلث Δabc



حل نظام مكون من معادلات

١) معادلات خطية

خطوات الحل:
١) توحيد المعاملات
٢) استخدام الجمع والطرح
٣) تعويض داخل المعادلة

Ex: 1) $2a+b=24$
$5a-b=4$ $+$

$\frac{7a}{7}=\frac{28}{7} \Rightarrow \boxed{a=4}$

* $2a+b=24$
$(2*4)+b=24$
$8+b=24 \Rightarrow \boxed{b=16}$

Ex: 2) $3a+4b=2$
$6a+b=-3$

3) $-a-b=0$
$4a+3b=-1$

4) $2a-3b=0$
$3a-2b=5$

٢) معادلات خطية وتربيعية

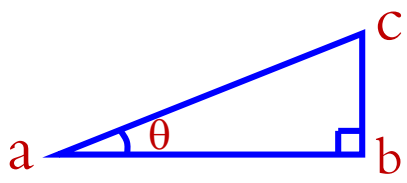
Ex: 1) $a+b=2$
$a^2-b^2=4$

2) $x-y=1$
$x^2+y^2=5$

3) $2x+y=12$
$y=x^2+5x-0$

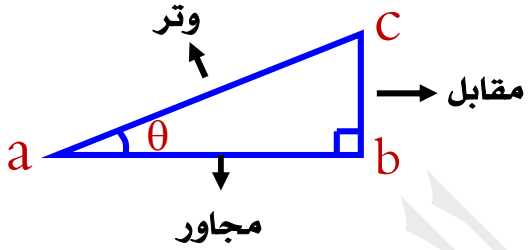
النسب المثلثية

نظرية فيثاغورس



$$(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2$$

النسب المثلثية



١) θ زاوية حادة $\leftarrow 0 < \theta < 90$

٢) cb ضلع مقابل للزاوية θ

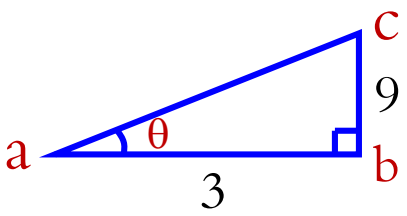
٣) ab ضلع مجاور للزاوية θ

٤) ac الوتر

مقلوب النسبة	النسبة المثلثية
$1)\ \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{ac}{cb}$	$1)\ \sin\theta = \frac{cb}{ac}$
$2)\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{ac}{ab}$	$2)\ \cos\theta = \frac{ab}{ac}$
$3)\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{ab}{cb} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$3)\ \tan\theta = \frac{cb}{ab} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

تمرين

جد النسبة المثلثية للزاوية θ ؟

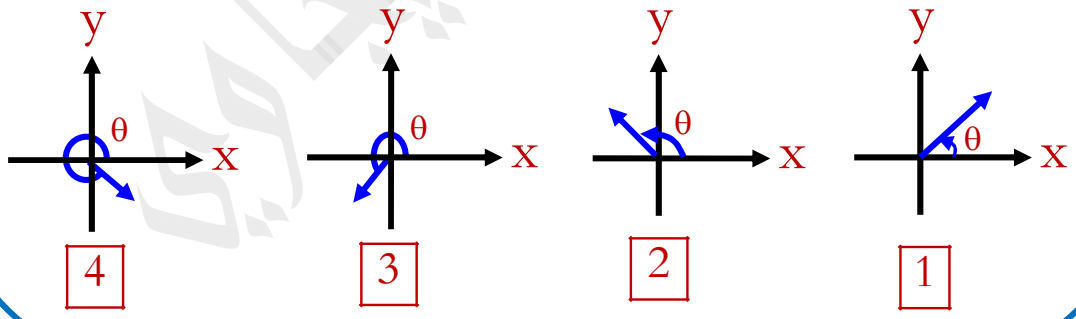


1) $\sin\theta =$ 2) $\cos\theta =$ 3) $\tan\theta =$

4) $\csc\theta =$ 5) $\sec\theta =$ 6) $\cot\theta =$

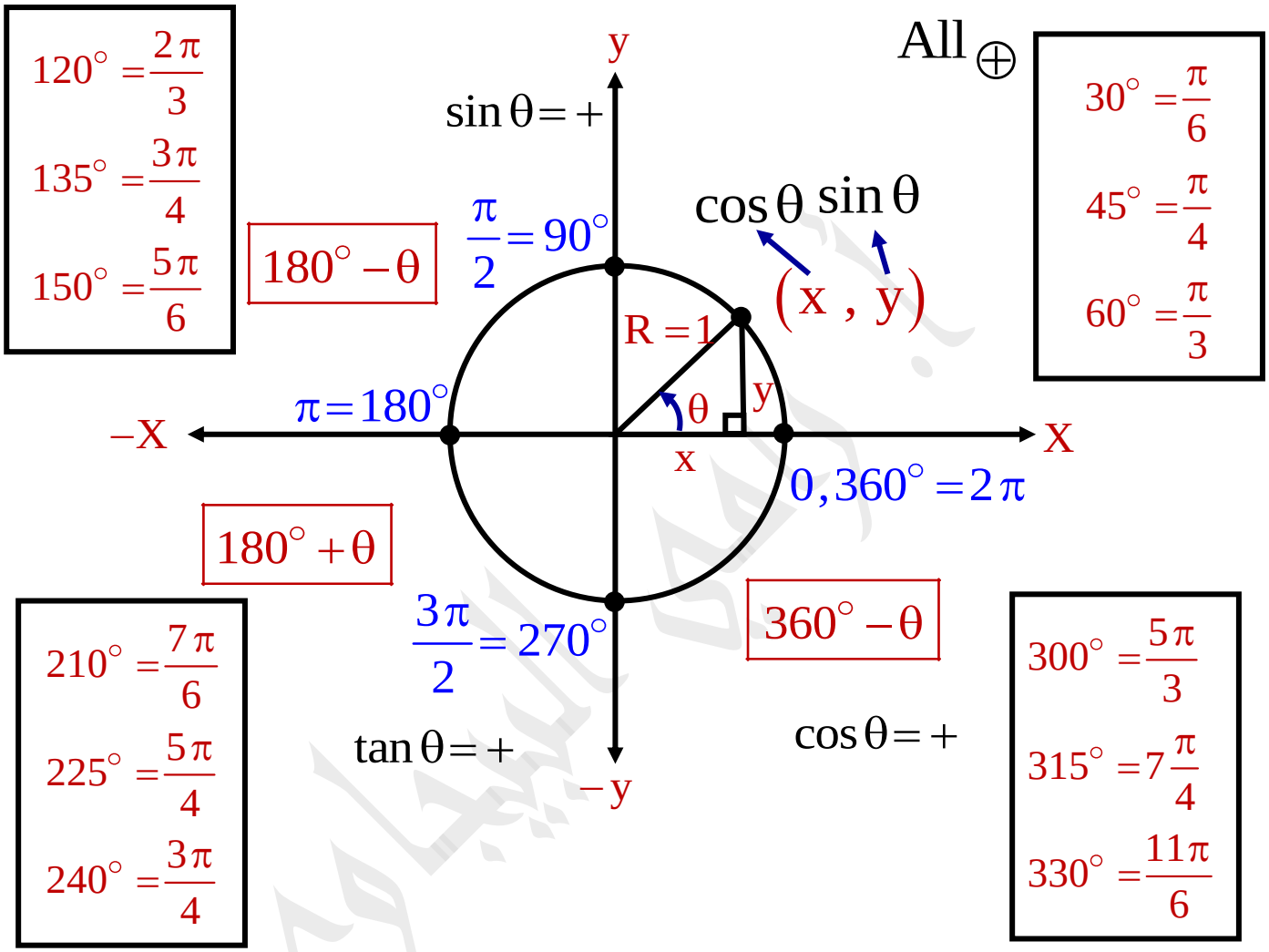
تعريف

الزاوية في الوضع القياسي : هي الزاوية التي يكون رأسها على نقطة الأصل $(0\,,0)$ وضلع الابتداء على محور (x) الموجب وضلع الانتهاء موجود على أحد المحاور أو داخل الأرباع وتسير بعكس عقارب الساعة.



دائرة الوحدة

تعريف: دائرة نصف قطرها (R) يساوي (1) وحدة



❖ تحويل الزاوية من تقدير درجات إلى راديان

قاعدة

$$\theta^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

١) $30^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi^{rad}}{6} \leftarrow 30^\circ$

٢) $60^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi^{rad}}{3} \leftarrow 60^\circ$

❖ تحويل الزاوية من تقدير درجات إلى راديان

قاعدة

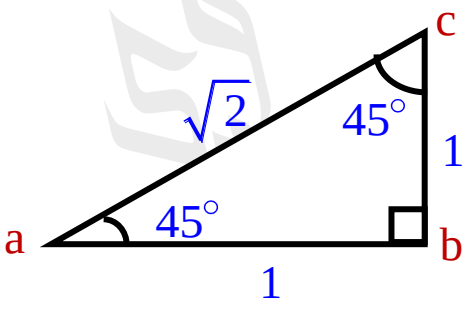
$$\theta^{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

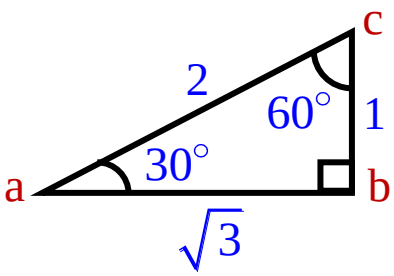
١) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ \leftarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^{rad}$

ملاحظة

لتحويل $(2)^{Rad}$ إلى درجات اضرب بالمقدار (57.3)

$2 * 57.3 = 114.6$





الجذر السحري للنسب المثلثية

360

180 270

	0	30	45	60	90
sin x	0	1	2	3	4
cos x	4	3	2	2	0
tan x	÷	÷	÷	÷	÷

2

❖ طريقة (Al Baba) تحويل من درجات ← إلى دائري

1) $30^\circ =$ 2) $45 =$ 3) $60 =$ 4) $150 =$

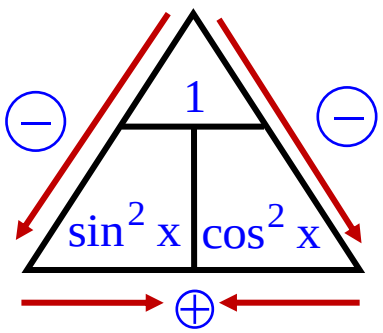
5) $135 =$ 6) $120 =$ 3) $225 =$ 4) $210 =$

المتطابقات المثلثية المشهورة

$$\sin^2 X + \cos^2 X = 1$$

$$\sin^2 X = 1 - \cos^2 X$$

$$\cos^2 X = 1 - \sin^2 X$$



المثلث السحري

$$\sin^2 X + \cos^2 X = 1$$

$\sin^2 X \div$ | $\div \cos^2 X$

$$1 + \cot^2 X = \csc^2 X$$

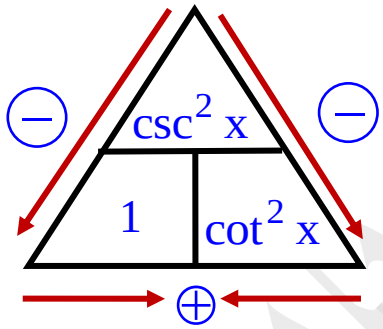
$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

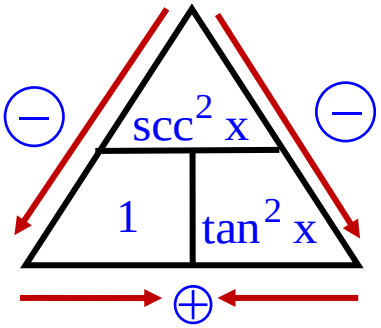
$$\tan^2 X + 1 = \sec^2 X$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\tan^2 x - \sec^2 x = 1$$



المثلث السحري



متطابقة ضعف الزاوية

$$1)\ \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

1
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

2
$$\sin 3x = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

3
$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$$

متطابقة "يهود بني قريظة"

$$2)\ \cos 2\theta =$$

1
$$\cos^2\theta - \sin^2\theta$$

2
$$1 - 2\sin^2\theta$$

3
$$2\cos^2\theta - 1$$

$$3)\ \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

حل المعادلات المثلثية :-

خطوات الحل:

١) تجميع الحدود المتشابهة.
٢) توحيد الزوايا.
٣) استخدام المتطابقات المشهورة.
٤) طرق التحليل.

تعريف : حل المعادلة المثلثية هو إيجاد قيمة الزاوية (θ) بالتقدير الدائري مع مراعات مجال الاقتران المعطى في السؤال.

حل كل من المعادلات الآتية:

Ex:

1) $\sin X=\frac{1}{2}$

2) $\cos X=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

3) $3\sin X-2=5\sin X-1$

4) $\tan^2 X-3=0$

5) $2\sin^2 X-3\sin X+1=0$

6) $\cos X\sin X=3\cos X$

7) $2\cos^2 X+3\sin X=0$

8) $\sin 2X-\cos X=0$

9) $\cos X+1=\sin X$

10) $\cos X\sin X=\frac{-1}{2}$

11) $2\sin\frac{X}{2}-\sqrt{3}=0$

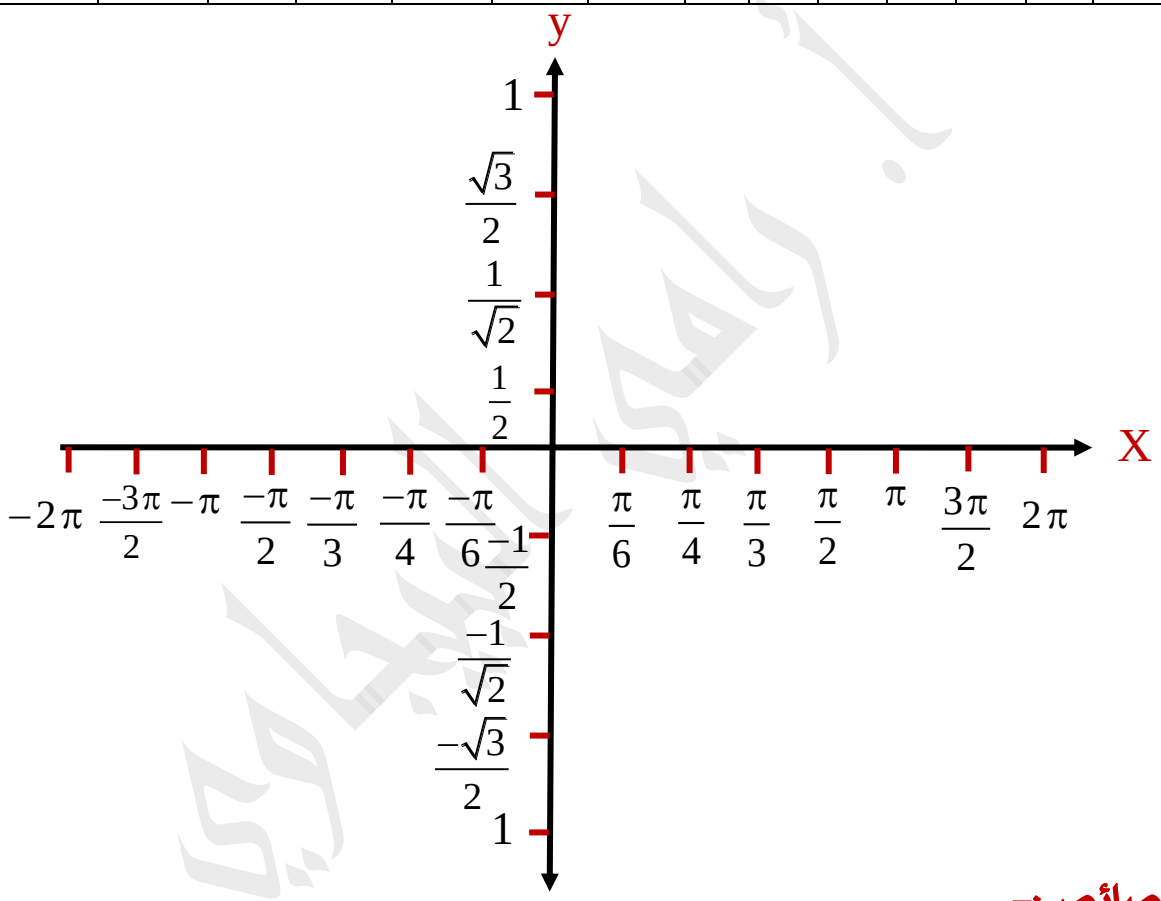
12) $2\cos\frac{X}{2}-1=0$

الاقترانات الدائرية

تمثيل الاقترانات بيانياً:

1) $f(x)=\sin x$

x	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$															



الخصائص:-

١) **المجال** $R = \quad -2\pi \le X \le 2\pi$

٢) **المدى** $-1 \le y \le 1 =$

٣) **مقطع محور** $(X) = \pi\ ,\ 2\pi\ ,\ -\pi\ ,\ -2\pi$

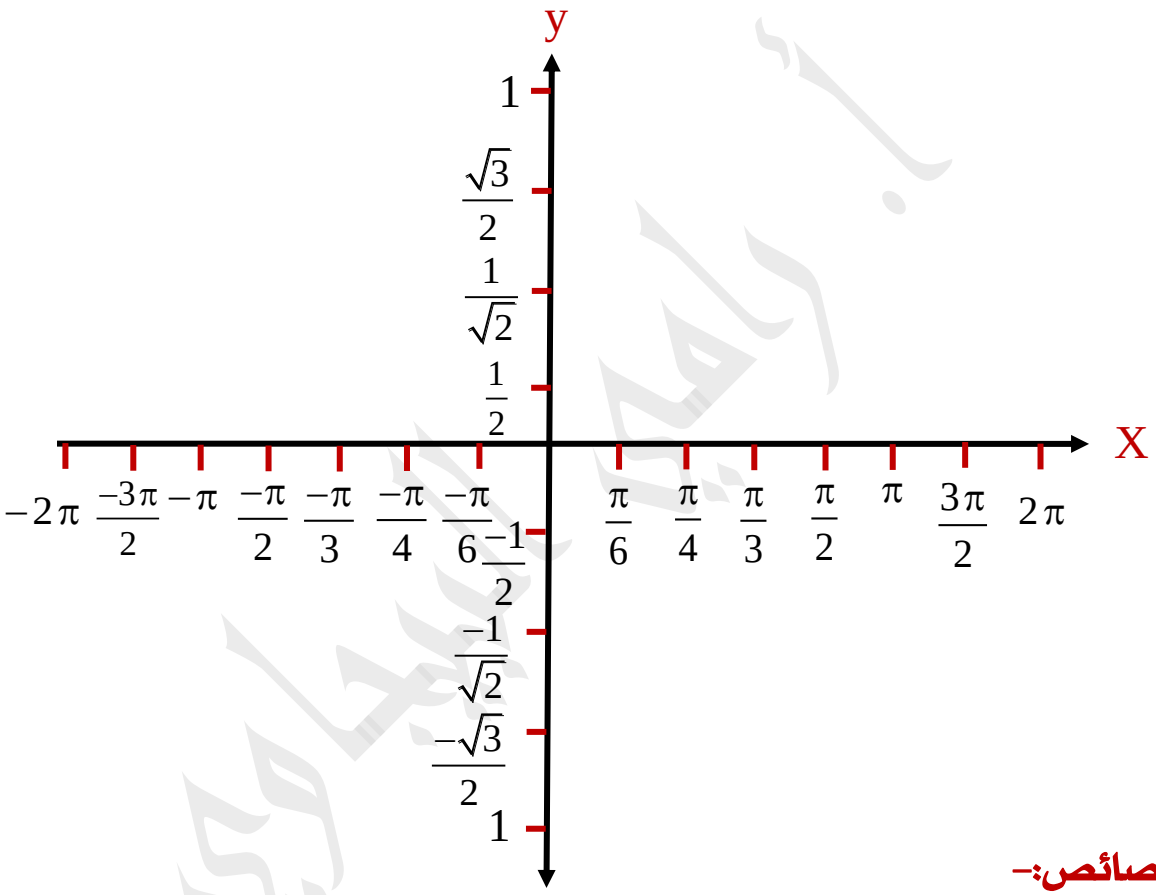
٤) **مقطع محور** $(y) = \boxed{y=0}$

٥) **طول الدورة** $= 2\pi$

تمثيل الاقترانات بيانياً:

2) $f(x)=\cos x$

x	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$															



الخصائص:-

١) **المجال** $R = -2\pi \le X \le 2\pi$

٢) **المدى** $y = -1 \le y \le 1$

٣) **مقطع محور** $(X) = \frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

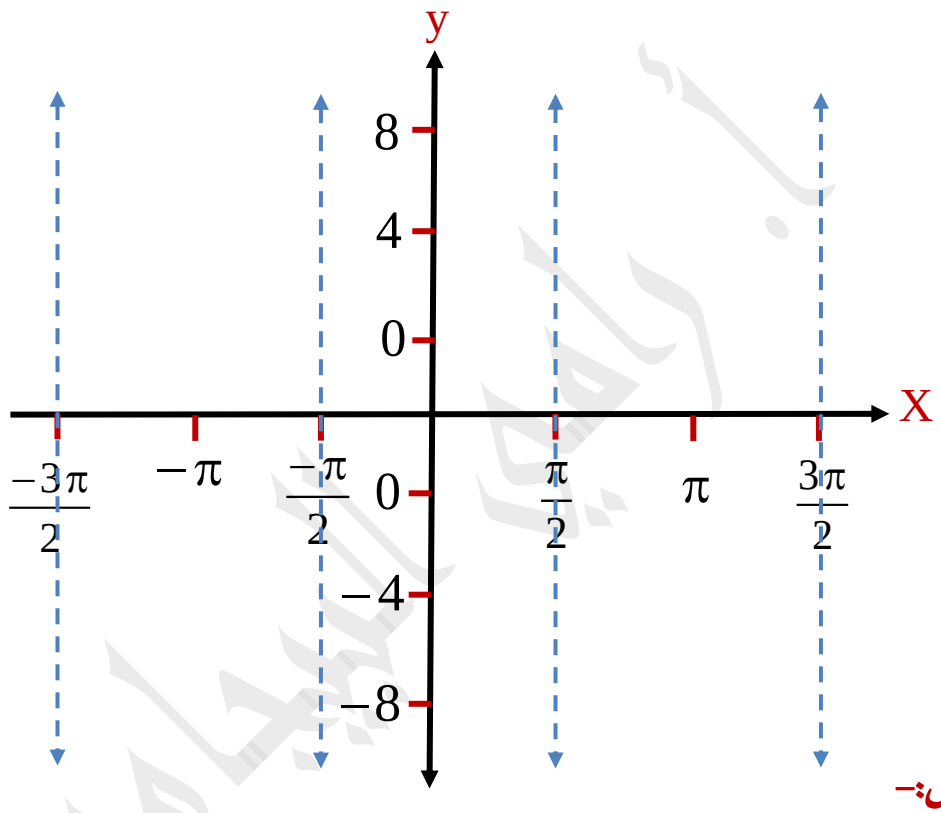
٤) **مقطع محور** $(y) = \boxed{y=1}$

٥) **طول الدورة** $= 2\pi$

تمثيل الاقترانات بيانياً:

3) $f(x)=\tan x$

x	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$							



الخصائص:-

١) **المجال** $R-\left\{\frac{\pi}{2}n\right\}$ **حيث** n : **عدد فردي**

٢) **المدى** $R=$

٣) **مقطع محور** (X) $\quad X=\{-\pi\ ,\ 0\ ,\ \pi\}$

٤) **مقطع محور** (X) $\quad y=\{0\}$

٥) **له محور تماثل رأسي** $X=\left\{\frac{-3\pi}{2}\ ,\ \frac{-\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\right\}$ $\quad$ ٥) **طول الدورة** $=\pi$

النسب المثلثية للزوايا السالبة

1) $\sin(-30) =$

2) $\cos(-30) =$

3) $\tan(-30) =$

قاعدة

1) $\sin(-\theta) = -\sin(-\theta)$
2) $\cos(-\theta) = \cos(-\theta)$
3) $\tan(-\theta) = -\tan(-\theta)$

1) $\sin(-30) =$

2) $\cos(-30) =$

3) $\tan(-30) =$